Übungsaufgaben zur Vorlesung "Mathematik I für Studierende des Ingenieurwesens und der Informatik" — WS 2011/12

Prof. Dr. Annette Huber-Klawitter — 11. Januar 2012

Dr. Mario Listing — Übungsblatt 10

Aufgabe 1 (6 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$ auf ganz $\mathbb{R}$ umkehrbar ist.

b) Sei $\operatorname{artanh} : (-1,1) \to \mathbb{R}$ die Umkehrfunktion des tangenshyperbolicus. Berechnen Sie $\operatorname{artanh}'(0)$.

c) Bestimmen Sie eine explizite Formel für $\operatorname{artanh}(x)$. *Hinweis: Lösen Sie zuerst* $\tanh x = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ *nach* e^{2x} *auf.*

Aufgabe 2 (3 Punkte)
Zeigen Sie, dass die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \in \mathbb{Q} \\ 1 & , \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

nicht Riemann integrierbar ist. *Hinweis: Betrachten Sie zum Beispiel Zerlegungen* $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ *mit* $x_j = \frac{j}{n}$ *und bestimmen Sie die Grenzwerte der Ober–und Untersumme wie im Beweis von Satz 4.1.4. Sie dürfen benutzen, dass für je zwei rationale Zahlen* $x < y$ *eine nicht rationale Zahl* t *mit* $x < t < y$ *existiert.*

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$\int_0^{\pi/2} x^2 \sin 2x \, dx \qquad \text{und} \qquad \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \cos x} \,.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Gegeben sei $a \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie eine Stammfunktion von

$$x^a \cdot \ln x \ , \ x > 0 \qquad \text{und von} \qquad \frac{(\ln x)^a}{x} \ , \ x > 1.$$

Alle Ergebnisse/Resultate sind zu begründen bzw. herzuleiten.
Abgabe der Lösungen: bis 12 Uhr am 19.01.2012 in den entsprechenden Briefkasten Ihrer Übungsgruppe (Kellergebäude in der Mathematik, Eckerstraße 1).