Mathematik I

für Studierende des Ingenieurwesens und der Informatik

Vorlesungsskript

Wintersemester 2011/12

Prof. Dr. Annette Huber-Klawitter

Literatur:
K. Meyberg, P. Vachenauer: Höhere Mathematik Bd 1, Springer Verlag.

Version vom 5. März 2012

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Grundbegriffe und Zahlbereiche

Ein wesentliches Ziel dieses Kapitels ist es verschiedene Begriffe und Bezeichnungen, die im Weiteren benötigt werden, zu definieren und einzuführen. Vieles ist dabei bereits aus der Schule bekannt. Insbesondere soll eine Klarstellung und Vereinheitlichung der Notation erreicht werden.

1.1 Mengen und Abbildungen

1.1.1. *Eine* **Menge** *ist eine Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen. (Georg Cantor, ca. 1875)*

Bezeichnungen:

- Objekte der Mengen heißen **Elemente**.

$$\begin{aligned} &a \in A, && a \text{ ist Element von } A\,, \\ &a \notin A, && a \text{ ist kein Element von } A\,. \end{aligned}$$

- Zwei Mengen sind gleich $A = B$, wenn sie dieselben Elemente haben.

- Beschreibung einer Menge durch Aufzählen ihrer Elemente:
  $A = \{1, 2, 3\}$ hat genau die Elemente 1, 2 und 3. Es gilt

$$\{1, 1, 2, 3\} = \{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\}\ ,$$

  denn auf Reihenfolge und Nummerierung kommt es nicht an.

- Beschreibung einer Menge X durch Angeben einer definierenden Eigenschaft
$$X := \{x \in A \ : x \text{ hat die Eigenschaft } E\}\,.$$

- Die **leere Menge** $\emptyset$ enthält kein Element.

- B heißt **Teilmenge** von A, wenn jedes Element von B auch ein Element von A ist

- B heißt **echte Teilmenge** von A, in Zeichen $B \subsetneq A$, wenn $B \subseteq A$, und es ein $x \in A$ gibt mit $x \notin B$.

1.1.2 Definition. *Eine* **Aussage** *ist ein sinnvolles sprachliches Gebilde, dass entweder wahr oder falsch ist.*

- Aussagen kann man miteinander verknüpfen. Diese Verknüpfungen werden in **Wahrheitstabellen** definiert.

- **Negation** $\neg A$: Es gilt genau das Gegenteil von A.

- **Konjunktion** $A \wedge B$: Es gilt A und B (beide gleichzeitig!)

- **Alternative** : $A \vee B$: Es gilt A oder B (oder beide!)

- **Implikation** $A \Rightarrow B$: Wenn A gilt, dann auch B. (Wenn A nicht gilt, dann kann B gelten oder auch nicht.)

- **Äquivalenz**: A gilt genau dann, wenn B gilt. $A \Leftrightarrow B$

-

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
W	W	F	W	W	W	W
W	F		F	W	F	F
F	W	W	F	W	W	F
F	F		F	F	W	W

- **Existenzquantor** $\exists$
$$\exists\, x \in M : E$$
heißt: es existiert ein x aus M mit der Eigenschaft E.

- **Generalisationsquantor** $\forall$
$$\forall\, x \in M : E$$
heißt: für alle x aus M gilt die Eigenschaft E.

In dieser Notation bedeutet $A \subseteq B$:

$$B \subseteq A \Leftrightarrow \big(b \in B \Rightarrow b \in A\big)\,.$$

1.1.3 Mengenoperationen**.** *Seien $A, B \subseteq M$ zwei Teilmengen von M. Dann definieren wir folgende Verknüpfungen:*

Durchschnitt	$A \cap B$	$:= \{x \in M; (x \in A) \wedge (x \in B)\}\,,$
Vereinigung	$A \cup B$	$:= \{x \in M; (x \in A) \vee (x \in B)\}\,,$
Differenz	$A \backslash B$	$:= \{x \in M; (x \in A) \wedge (x \notin B)\}\,,$
Komplement	$A^{\complement}$	$:= \{x \in M; x \notin A\}\,.$

- Mengen heißen **disjunkt**, wenn sie kein gemeinsames Element haben.

- Die **Produktmenge** $A \times B$ zweier Mengen A, B ist definiert durch

  $$A \times B := \{(a, b);\ (a \in A) \wedge (b \in B)\}\,,$$

  d.h. sie ist die Menge der geordneten Paare.

- $A \times B$ ist eine neue Menge. Zwei Elemente $(a, b), (c, d)$ sind gleich, in Zeichen $(a, b) = (c, d)$, genau dann wenn $(a = c) \wedge (b = d)$.

- Analog definiert man für mehrere Mengen $A_i, i = 1, \ldots, n$,

  $$A_1 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, \ldots, a_n);\ a_i \in A_i, i = 1, \ldots, n\}\,.$$

  $(a_1, \ldots, a_n)$ heißt **geordnetes n-Tupel**. Falls $A_1 = \cdots = A_n = A$ schreibt man

  $$A^n \quad \text{statt} \quad \underbrace{A \times \cdots \times A}_{n-mal}$$

1.1.4 Definition. *Seien A, B Mengen. Eine* **Funktion** *oder* **Abbildung** *von A nach B ist eine Teilmenge f der Produktmenge $A \times B$ derart, dass zu jedem $x \in A$ genau ein $y \in B$ existiert mit $(x, y) \in f$.*

Bezeichnungen:

- Statt $(x, y) \in f$ schreibt man $y = f(x)$ oder $f : A \to B : x \mapsto f(x)$.
  $y = f(x)$ nennt man **Funktionswert von f an der Stelle** x. Wir nennen x auch Argument.

- A heißt **Definitionsbereich von** f, in Zeichen $D(f) := A$.
- Sei $C \subseteq A$, dann ist das **Bild von** C **unter** f definiert durch
$$f(C) := \{f(x);\, x \in C\}\,.$$
Insbesondere heißt $f(A)$ **Wertebereich von** f.
- Eine Funktion $f : A \to B$ heißt
$$\begin{array}{rcl} \textbf{surjektiv} & \Leftrightarrow & f(A) = B \quad \text{(Wertebereich ist gesamte Menge } B)\,, \\ \textbf{injektiv} & \Leftrightarrow & (x_1 \neq x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \neq\; f(x_2)) \\ & & \text{(verschiedene Argumente haben verschiedene Bilder)}, \\ \textbf{bijektiv} & \Leftrightarrow & \text{injektiv und surjektiv}\,. \end{array}$$
- Sei $f : A \to B$ bijektiv, dann ist die **Umkehrabbildung** f^{-1} definiert als
$$f^{-1} := \{(f(x), x);\, x \in A\}\,.$$
- Die **identische Abbildung** ist gegeben durch
$$\mathrm{id} :\; A \to A :\; x \mapsto x$$
- **Gleichheit von zwei Abbildungen:** Seien $f : A \to B\,, g : C \to D$ zwei Abbildungen. Es gilt:
$$f = g \quad\Leftrightarrow\quad \big((A = C) \wedge (B = D) \wedge (\forall x \in A :\; f(x) = g(x))\big)\,.$$
- Die **Restriktion** einer Funktion $f : A \to B$ auf $A_0 \subset A$ ist definiert durch:
$$f|_{A_0} := \{(x, f(x)); x \in A_0\}\,.$$

1.2 Reelle Zahlen

Bezeichnungen:

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$	**natürliche Zahlen**
$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$	
$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$	**ganze Zahlen**
$\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n}; m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\right\}$	**rationale Zahlen**
$\mathbb{R}$	**reelle Zahlen**

Die **reellen Zahlen** werden axiomatisch eingeführt. Man betrachtet eine Menge auf der zwei Operationen $+, \cdot$ definiert sind. Weiterhin müssen die Körperaxiome, die Ordnungsaxiome und das Vollständigkeitsaxiom erfüllt sein. Außerdem ist $\mathbb{R}$ archimedisch (s.u.) Die Körperaxiome sichern, dass man wie gewohnt addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren kann. Die Ordnungsaxiome sichern, dass man zwei beliebige reelle Zahlen der Größe nach vergleichen kann, d.h. es gilt immer genau eine der Möglichkeiten:

$$x < y\,, \qquad x = y\,, \qquad x > y\,.$$

Man schreibt

$$x \leq y \Leftrightarrow (x < y) \vee (x = y)\,.$$

Die Ordnungsrelation $\leq$ ist kompatibel mit den Operationen $\cdot, +$ und es gilt:

$$\begin{aligned} x \leq y, a \leq b \quad &\Rightarrow \quad a + x \leq b + y\,, \\ x \leq y, a \geq 0 \quad &\Rightarrow \quad a \cdot x \leq a \cdot y\,, \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} x \leq y \quad &\Leftrightarrow \quad -y \leq -x\,, \\ 0 < x \leq y \quad &\Leftrightarrow \quad 0 < \tfrac{1}{y} \leq \tfrac{1}{x}\,. \end{aligned} \tag{2.2}$$

1.2.1 Definition. *Sei $S \subseteq \mathbb{R}$. S heißt* **nach oben beschränkt***, wenn es eine Zahl $b \in \mathbb{R}$ gibt, so dass*

$$\forall x \in S: \quad x \leq b\,.$$

Man nennt b eine **obere Schranke** *von S.*

- Analog definiert man die Begriffe **nach unten beschränkt** und **untere Schranke**.
- S heißt **beschränkt**, falls S eine obere und eine untere Schranke besitzt.

1.2.2 Axiom. *(Vollständigkeit) Jede nicht-leere nach oben beschränkte Menge reeller Zahlen besitzt eine kleinste obere Schranke.*

- Die kleinste obere Schranke heißt **Supremum**. Sei $S \subseteq \mathbb{R}$ nach oben beschränkt. Dann setzt man

$$s := \sup S \;\Leftrightarrow\; \forall \varepsilon > 0 \;\exists x \in S : s - \varepsilon < x \leq s$$

- Die größte untere Schranke, nennt man **Infimum**.

1.2.3 Axiom. *(Archimedisches Axiom) Zu jeder reellen Zahl x gibt es eine ganze Zahl n, die größer als x ist, also $x < n$.*

1.2.4 Definition. *Der* **Betrag** $|a|$ *einer reellen Zahl $a \in \mathbb{R}$ ist definiert durch*

$$|a| = \begin{cases} a & \textit{falls } a \geq 0, \\ -a & \textit{falls } a < 0. \end{cases}$$

- Aus der Definition ergeben sich folgende Rechenregeln:

$$\begin{aligned} -|a| \leq a \leq |a|\,, \\ |-a| = |a|\,, \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned} |ab| &= |a||b|\,, \\ \left|\frac{a}{b}\right| &= \frac{|a|}{|b|} \qquad \text{falls } b \neq 0\,, \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$|a| \leq b \quad \Leftrightarrow \quad -b \leq a \leq b\,. \tag{2.5}$$

- Aus (2.3) und (2.5) folgt die **Dreiecksungleichung**: $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$|a + b| \ \leq |a| + |b|\,. \tag{2.6}$$

- Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Dann wird mit $|a - b|$ der **Abstand** der zu a und b gehörigen Punkte auf der Zahlengeraden bezeichnet. Also gilt für $a, x \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$:

$$|a - x| \leq \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad a - \varepsilon \leq x \leq a + \varepsilon$$

1.2.5 Intervalle**.** *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Dann definiert man:*

$[a, b] := \{x \in \mathbb{R};\ \ a \leq x \leq b\}$ **abgeschlossenes Intervall**,

$(a, b) := \{x \in \mathbb{R};\ \ a < x < b\}$ **offenes Intervall**.

- analog: halboffene Intervalle $(a, b], [a, b)$

- Zum Vermeiden von Fallunterscheidungen führen wir $-\infty, \infty$ ein und legen fest: $-\infty < x < \infty \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Somit gilt:

$$\begin{aligned}(-\infty, a] &:= \{x \in \mathbb{R};\ x \le a\}\,,\\ (b, \infty) &:= \{x \in \mathbb{R},\ x > b\}\,,\\ \mathbb{R} &= (-\infty, \infty)\,.\end{aligned}$$

  Also ist $\mathbb{R}$ ein offenes Intervall.

- Das offenes Intervall $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ heißt **$\boldsymbol{\varepsilon}$ - Umgebung** von a.

1.2.6 vollständige Induktion**.** *Aussagen oder Eigenschaften können von Elementen einer Menge A abhängen, z.B.*

$$\forall n \in A :\ E(n)\,.$$

Falls $A = \{n_0, n_0 + 1, \dots\} \subseteq \mathbb{Z}$ kann man den Wahrheitsgehalt solcher Aussagen mit vollständiger Induktion beweisen, d.h.

1) Induktionsbegin: *Man zeigt, dass $E(n)$ für $n = n_0$ gilt.*

2) Induktionsschritt: *Für beliebiges $n \ge n_0$ setzt man die Gültigkeit von $E(n)$ voraus* **(Induktionsvoraussetzung)** *und leitet daraus die Gültigkeit von $E(n + 1)$ her.*

1.2.7 Beispiel. **(Bernoulli - Ungleichung:)**

$$\forall h \in (-1, \infty),\ \forall n \in \mathbb{N} :\ (1 + h)^n \ge 1 + nh \tag{2.7}$$

Beweis. Sei $h \in (-1, \infty)$ fest. Für $n = 1$ gilt

$$(1 + h)^1 = 1 + h = 1 + 1 \cdot h$$

Angenommen die Aussage gilt für $n_0 \ge 1$, d.h.

$$(1 + h)^{n_0} \ge 1 + n_0 h\ .$$

Wegen $1 + h > 0$ folgt hieraus

$$(1 + h)^{n_0}(1 + h) \ge (1 + n_0 h)(1 + h) = 1 + n_0 h + h + n_0 h^2$$

Wegen $h^2 \ge 0$ ist die rechte Seite $\ge 1 + (n_0 + 1)h$. Insgesamt folgt also

$$(1 + h)^{n_0+1} \ge 1 + (n_0 + 1)h\ .$$

Mit vollständiger Induktion gilt die Aussage für alle $n_0 \in \mathbb{N}$. □

Auf der vollständigen Induktion beruht auch das Verfahren der **Definition durch Rekursion**.

- Sei $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Die **Potenzen** a^n, für $n \in \mathbb{N}_0$ sind definiert durch:
  (1) $a^0 := 1$
  (2) $a^{n+1} := a^n \cdot a$
- Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Dann ist **Fakultät** $n!$ definiert als:
  (1) $0! := 1$
  (2) $(n+1)! := (n+1)n!$
- **Summen- und Produktzeichen** Seien $a_i \in \mathbb{R}$, $m \leq n \in \mathbb{N}_0$, $i = m, \ldots, n$, $m \leq n \in \mathbb{N}_0$. Dann definieren wir:

$$\sum_{i=m}^{n} a_i := a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n$$
$$\prod_{i=m}^{n} a_i := a_m \cdot a_{m+1} \cdot \cdots \cdot a_n$$

- Es gilt die Ungleichung:

$$\Big| \sum_{i=m}^{n} a_i \Big| \leq \sum_{i=m}^{n} \big| a_i \big| \,. \tag{2.8}$$

- Für die endliche **geometrische Reihe** gilt:

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \qquad \text{falls } q \neq 1 \,. \tag{2.9}$$

1.2.8 Definition. *Für ganze Zahlen n, k mit $0 \leq k \leq n$ ist der* **Binomialkoeffizient** $\binom{n}{k}$ *definiert durch*

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \,.$$

• Eine **Permutation** ist eine bijektive Abbildung einer endlichen Menge A auf sich selbst.

1.2.9 Lemma. *Zu jeder Menge mit n Elementen gibt es genau $n!$ Permutationen.*

Beweis. Wir verteilen n Kugeln mit auf n Fächer. Wir zeigen mit vollständiger Induktion, dass es hierfür $n!$ Möglichkeiten gibt.
Die Aussage gilt für $n = 1$. Sei nun die Aussage wahr für n Kugeln. Wir betrachten $n + 1$ Kugeln. Für das erste Fach gibt es $n + 1$ Möglichkeiten. Danach müssen wir n Kugeln auf n Fächer verteilen. Hierfür gibt es nach Induktionsannahme $n!$ Möglichkeiten. Zusammen ergibt dies

$$(n+1)n! = (n+1)!\ .$$

□

1.2.10 Satz. *Eine Menge mit n Elementen besitzt $\binom{n}{k}$ verschiedene k-elementige Teilmengen.*

Beweis. Wie im Beweis des Lemmas gibt es $n(n-1)\dots(n-k+1)$ viele Möglichkeiten, aus n Kugeln k-viele auf Fächer zu verteilen. Hierbei werden jedoch verschiedene Anordnungen mehrfach gezählt. Es gibt $k!$ Möglichkeiten, k Kugeln anzuordnen. Insgesamt also

$$\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}$$

□

• Für Binomialkoeffizienten gilt die Rekursionsformel:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\,, \tag{2.10}$$

und folgende Rechenregeln:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}\,, \quad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1\,, \quad \binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} = n\,.$$

- Mit Hilfe von (2.10) kann man die Binomialkoeffizienten nur durch Addition berechnen, man erhält das **Pascalsche Dreieck:**

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 1 & & \\
 & 1 & & 2 & & 1 & \\
1 & & 3 & & 3 & & 1
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccccccc}
 & & & \binom{0}{0} & & & \\
 & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\
 & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\
\binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3}
\end{array}
$$

1.2.11 Satz (Binomische Formel)**.** *Für reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k.$$

Beweis. Wir argumentieren mit vollständiger Induktion nach n. Für $n = 1$ gilt die Aussage wegen

$$\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^{1-k} b^k = \binom{1}{0} a^1 b^0 + \binom{1}{1} a^0 b^1 = a + b\ .$$

Angenommen, die Aussage gilt für n. Dann folgt mit Induktionsvoraussetzung und wegen (2.10)

$$
\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&= (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{l=1}^{n+1} \binom{n}{l-1} a^{n+1-l} b^l \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) a^{n+1-k} b^k \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k
\end{aligned}
$$

□

1.3 Die Ebene und der Raum

Wir identifizieren die Ebene mit $\mathbb{R}^2$, indem wir das **kartesische Koordinatensystem** einführen.

- Man gibt den Punkt 0 in der Ebene vor,
- nimmt eine Zahlengerade, die x-**Achse**, so dass ihr Nullpunkt mit dem Punkt 0 übereinstimmt.
- Nun dreht man die x-Achse gegen den Uhrzeigersinn um 90^o und erhält die y-**Achse**.
- Für einen beliebigen Punkt $P_0 \in E$, fällt man das Lot auf die x- und die y-Achse und erhält die x-**Koordinate** x_0 und die y-**Koordinate** y_0 von P_0. Man schreibt
$$P = (x_0, y_0)\,.$$
Der Punkt $0 = (0, 0)$ heißt **Ursprung**.

Durch dieses Vorgehen haben wir eine bijektive Zuordnung von Punkten $P \in E$ und Zahlenpaaren $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ erhalten. Man kann also Teilmengen im $\mathbb{R}^2$ als Punktmengen in E veranschaulichen und Gebiete in E mit Hilfe von Gleichungen beschreiben.

- Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Die Menge
$$G_f := \{(x, y);\, x \in I, y = f(x)\}$$
heißt **Graph der Funktion** f.

1.3.1 Winkel**.** *Ein Winkel α ensteht durch Drehung eines Zeigers um einen Punkt der Ebene.*

- *Die Länge des zugehörigen Einheitskreisbogens sei ℓ. Wir nennen ℓ das* **Bogenmaß von** α*, wenn die Drehung in positiver Richtung (gegen Uhrzeigersinn) erfolgte. Falls die Drehung in Urzeigersinn erfolgte ist $-\ell$ das Bogenmaß.*
- *Ein Winkel α habe das Gradmaß $(\alpha_0)^\circ$. Das Bogenmaß ℓ des Winkels α errechnet sich durch:*
$$\ell = \frac{\pi}{180^\circ}\,(\alpha_0)^\circ$$

- *Im Weiteren werden wir immer mit dem Bogenmaß arbeiten.*

Genauso kann man den $\mathbb{R}^3$ und den Anschauungsraum R miteinander identifizieren.

- **Kartesische Koordinaten** im Raum bestehen aus drei sich in einem Punkt 0 rechtwinklig schneidenden Zahlengeraden, die ein Rechtssystem bilden. Man nennt sie die x-, y-, z-Achsen.

- Die **Koordinatenebenen** sind die durch zwei Achsen aufgespannten Ebenen. Man nennt sie auch die (x, y)-, (x, z)- und (y, z)-Ebenen.

1.3.2. *Gleichzeitig sind $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$* **Vektorräume***, d.h. man kann die Elemente addieren und mit reellen Zahlen multiplizieren:*
Seien $\vec{v} = (x, y, z)$ und $\vec{w} = (x', y', z')$ in $\mathbb{R}^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \vec{v} + \vec{w} &= (x + x', y + y', z + z') \\ \vec{v} - \vec{w} &= (x - x', y - y', z - z') \\ a\vec{v} &= (ax, ay, cz) \end{aligned}$$

Die Elemente des Vektorraums heißen auch **Vektoren***. Man schreibt of $\vec{v}$ oder $\underline{v}$, aber auch einfach v. Das Element $0 := \vec{0} := (0, 0, 0)$ heißt* **Nullvektor***.*

1.3.3 Bemerkung. Einen Vektor $\overrightarrow{v} = (a, b, c)$ kann man auch als eine bijektive Abbildung vom Raum in sich selbst auffassen. $\overrightarrow{v}$ ist die Parallesverschiebung um a in x-Richtung, b in y-Richtung und c in z-Richtung. Üblich ist auch die Notation $\overrightarrow{PQ}$ für die Verschiebung, die den Punkt P auf den Punkt Q abbildet.

1.3.4. *Seien $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Dann gelten die folgenden Rechenreglen.*

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}\,, \tag{3.1}$$

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}\,, \tag{3.2}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}\,, \tag{3.3}$$

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}\,, \tag{3.4}$$

$$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}\,, \tag{3.5}$$

$$(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}\,, \tag{3.6}$$

$$1\vec{a} = \vec{a}\,, \tag{3.7}$$

$$0\vec{a} = \vec{0}\ . \tag{3.8}$$

Beweis. Nachrechnen mit den Rechneregeln für $\mathbb{R}$. Z.B. für $\vec{a} = (x, y, z)$

$$\vec{a} + \vec{0} = (x, y, z) + (0, 0, 0) = (x + 0, y + 0, z + 0) = (x, y, z) = \vec{a}$$

□

1.3.5 Definition. *Die* **Länge** *bzw. die* **Norm** *eines Vektors $\vec{a} = (x, y, z)$ ist die Länge der Strecke von $(0, 0, 0)$ nach (x, y, z) im Raum*

$$\|\vec{a}\| := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\ .$$

1.3.6. *Sei $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gelten die folgenden Rechenregeln:*

$$\|\alpha\,\vec{a}\| = |\alpha|\,\|\vec{a}\| \tag{3.9}$$

$$\|\vec{a} + \vec{b}\| \le \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\| \tag{3.10}$$

Beweis. Die erste Aussage ist ganz leicht. Die zweite ist etwas mühsamer. Konzeptionell wird sie in der linearen Algebra bewiesen. Wir werden wenigstens den zweidimesionalen Fall noch sehen, aber in der Sprache der komplexen Zahlen. □

1.4 Komplexe Zahlen

Bisher haben wir Punkte z der Ebene, die mit einem kartesischen Koordinatensystem versehen ist, als Zahlenpaare $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ aufgefasst. Jetzt schreiben wir

$$1 := (1, 0) \qquad i = (0, 1)$$

und damit den Punkt $z = (x, y)$ als

$$z := x + i\,y\ . \tag{4.1}$$

Wir nennen dies eine **komplexe Zahl** mit **Realteil** $\operatorname{Re} z := x$ und **Imaginärteil** $\operatorname{Im} z := y$. Die x-Achse heißt **reelle Achse** und die y-Achse **imaginäre Achse**. Die Menge der komplexen Zahlen wird mit

$$\mathbb{C} := \{x + i\,y; x, y \in \mathbb{R}\} \tag{4.2}$$

bezeichnet. Für zwei komplexe Zahlen $z = x+iy$, $w = u+iv$ mit $x, y, u, v \in \mathbb{R}$ gilt:

$$z = w \qquad \Longleftrightarrow \qquad (x = u) \wedge (y = v)\,. \tag{4.3}$$

1.4.1 Grundrechenarten in $\mathbb{C}$. *Seien $z = x+iy$, $w = u+iv$ mit $x, y, u, v \in \mathbb{R}$ zwei komplexe Zahlen.*

- *Die* **Summe** *und die* **Differenz** *von z, w ist definiert als Summe und Differenz von Vektoren:*

$$\begin{aligned} z + w &:= (x+u) + i\,(y+v)\,, \\ z - w &:= (x-u) + i\,(y-v)\,. \end{aligned} \tag{4.4}$$

- *Die* **Multiplikation** *mit reellen Zahlen ist die Skalarmultiplikation von Vektoren:*

$$\lambda z := \lambda x + i\lambda y.$$

  Die Multiplikation zweier komplexer Zahlen leitet sich hieraus her mit den üblichen Rechengesetzen und der Regel

$$i^2 = -1\,. \tag{4.5}$$

  Wir erhalten also:

$$z\,w : = (x+i\,y)(u+i\,v) = xu + i\,xv + i\,yu + i^2 yv \tag{4.6}$$

$$= (xu - yv) + i\,(xv + yu)\,. \tag{4.7}$$

- *Die* **Potenzen** z^n *sind rekursiv definiert durch:*

$$z^0 := 1\,, \qquad z^n := zz^{n-1}\,, \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{4.8}$$

- *Sei $w \neq 0$. Dann ist in $\mathbb{C}$ die* **Division** *durch w möglich:*

$$\frac{z}{w} = \frac{x+iy}{u+iv} := \frac{x+iy}{u+iv}\frac{u-iv}{u-iv} \tag{4.9}$$

$$= \frac{(x+iy)(u-iv)}{(u+iv)(u-iv)} \tag{4.10}$$

$$= \frac{(xu+yv)+i(xv-yu)}{u^2+v^2} \tag{4.11}$$

$$= \frac{xu+yv}{u^2+v^2} + i\,\frac{yu-xv}{u^2+v^2}\,. \tag{4.12}$$

In $\mathbb{C}$ gelten die Körperaxiome, also die üblichen Rechenregeln für $+, -, \cdot, :$. Wegen $i^2 = -1$ gibt es jedoch keine Anordnung $<$ auf $\mathbb{C}$, die das Anordnungsaxiom erfüllt.

1.4.2 Definition. *Sei $z = x + iy$. Die zu z* **konjugierte komplexe Zahl** *$\overline{z}$ ist definiert durch:*

$$\overline{z} := x - i\,y\,.$$

- Wir haben folgende Rechenregeln für $z, w \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \overline{z+w} &= \overline{z} + \overline{w}\,, \\ \overline{zw} &= \overline{z}\,\overline{w}\,, \\ \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} &= \frac{\overline{z}}{\overline{w}}\,, \qquad \text{falls } w \neq 0\,, \end{aligned} \tag{4.13}$$

$$\begin{aligned} \overline{\overline{z}} &= z\,, \\ \operatorname{Re} z &= \tfrac{1}{2}(z + \overline{z})\,, \\ \operatorname{Im} z &= \tfrac{1}{2i}(z - \overline{z})\,. \end{aligned} \tag{4.14}$$

- Der **Betrag** $|z|$ von $z = x + iy$ ist die Norm als Vektor, also:

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2}\ . \tag{4.15}$$

Es gelten die Rechenregeln:

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{z\overline{z}}\ , \\ |zw| &= |z|\,|w|\,, \\ \left|\frac{z}{w}\right| &= \frac{|z|}{|w|}\,, \qquad \text{falls } w \neq 0\,, \\ |z| &= |\overline{z}|\,. \end{aligned} \tag{4.16}$$

1.4.3. *Es gilt die Dreiecksungleichung*

$$|z + w| \leq |z| + |w|\ . \tag{4.17}$$

Beweis. Sei $\alpha = x + iy$ eine komplexe Zahl. Dann gilt

$$|\alpha| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq \sqrt{x^2} = |x| \geq x = \operatorname{Re}\alpha\ .$$

Wir schreiben dies um als

$$\sqrt{\alpha\bar{\alpha}} \geq \frac{1}{2}(\alpha + \bar{\alpha})\ .$$

Wir setzen $\alpha = z\bar{w}$ ein:

$$2\sqrt{z\bar{z}w\bar{w}} \geq z\bar{w} + \bar{z}w \Rightarrow z\bar{z} + 2\sqrt{z\bar{z}w\bar{w}} + w\bar{w} \geq z\bar{z} + z\bar{w} + \bar{z}w + w\bar{w} \Leftrightarrow$$
$$(\sqrt{z\bar{z}} + \sqrt{w\bar{w}}^2) \geq (z+w)(\bar{z}+\bar{w})$$

Durch Ziehen der Quadratwurzel erhalten wir also

$$|z| + |w| \geq |z+w|$$

□

Sie kann durch Induktion auf n Summanden verallgemeinert werden

$$\left|\sum_{i=1}^{n} z_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |z_i| \,. \tag{4.18}$$

Nach Konstruktion hat -1 eine Quadratwurzel in $\mathbb{C}$.

1.4.4 Satz Qudaratische Gleichungen**.** *In $\mathbb{C}$ ist jede quadratische Gleichung*

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad a, b, c \in \mathbb{C}$$

lösbar.

Beweis. Wegen der bekannten Lösungsformel

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a}\sqrt{b^2 - 4ac}\,, \tag{4.19}$$

genügt es, die Existenz von Quadratwurzeln, d.h Lösungen von

$$x^2 = d$$

herzuleiten.
Für $d = 0$ ist die Behauptung klar. Sei zunächst $d > 0$ reell. Wir betrachten

$$s = \sup S, \qquad S = \{x \in \mathbb{R}; x^2 \leq d\}\ .$$

Das Supremum existiert nach dem Vollständigkeitsaxiom, da $0^2 \leq d$, d.h. die Menge ist nicht leer und $n^2 > d$ für eine natürliche Zahl $n > d$ (d.h.

die Menge ist nach oben beschränkt). Diese existiert wiederum nach dem archimedischen Axiom. Wir wollen nun zeigen:

$$s^2 = d$$

Angenommen, $s^2 > d$. Sei

$$\varepsilon = \frac{s^2 - d}{2s} > 0 \ .$$

Dann ist

$$(s - \varepsilon)^2 = s^2 - 2s\varepsilon + \varepsilon^2 = s^2 - s^2 + d + \varepsilon^2 > d \ .$$

Damit ist $s - \varepsilon$ ebenfalls eine obere Schranke von S, ein Widerspruch dazu, dass s die kleinste obere Schranke ist.
Angenommen, $s^2 < d$. Wir betrachten $\delta = d - s^2 > 0$. Wir wählen $\varepsilon > 0$ mit

$$\varepsilon < 2s, \ \varepsilon < \frac{\delta}{4s}$$

Dies ist möglich, denn nach dem archimedischen Axiom gibt es eine natürliche Zahl $n > 1/2s$ und gleichzeitig $n > 4s/\delta$. Dann erfüllt $\varepsilon = 1/n$ die beiden Bedingungen.
Damit folgt

$$(s + \varepsilon)^2 = s^2 + 2s\varepsilon + \varepsilon^2 < s^2 + 2s\varepsilon + 2s\varepsilon < s^2 + 4s\frac{\delta}{4s} = s^2 + d - s^2 = d$$

Also ist $s + \varepsilon \in S$. Dies ist ein Widerspruch dazu, dass s eine obere Schranke von S ist.
Es bleibt nur die Möglichkeit $s^2 = d$, d.h. $s = \sqrt{d}$. Ist $d < 0$ reell, so ist $i\sqrt{-d}$ die gesuchte Quadratwurzel.
Wir gehen zu komplexem $d = u + iv \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ über. Gesucht ist eine Lösung von

$$u + iv = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy \Leftrightarrow u = x^2 - y^2, v = 2xy \ .$$

Wegen $d \notin \mathbb{R}$ ist $v \neq 0$.
Wir betrachten

$$h = \frac{u}{2} + \sqrt{\frac{u^2 + v^2}{4}} \ .$$

Die Zahl unter der Wurzel ist positiv, die Wurzel also reell. Damit ist $h \in \mathbb{R}$. Angenommen, $h = 0$, d.h.

$$\frac{u}{2} = \sqrt{\frac{u^2 + v^2}{4}} \Rightarrow \frac{u^2}{4} = \frac{u^2 + v^2}{4} \Rightarrow v = 0$$

Die ist ein Widerspruch zur Voraussetzung. Daher dürfen wir setzen

$$x = \sqrt{h}, \quad y = \frac{v}{2x}$$

Wir überprüfen:

$$\begin{aligned} h(x^2 - y^2) &= hx^2 - \frac{v^2}{4} = h^2 - \frac{v^2}{4} \\ &= \frac{u^2}{4} + 2\frac{u}{2}\sqrt{\frac{u^2 + v^2}{4}} + \frac{u^2 + v^2}{4} - \frac{v^2}{4} \\ &= \frac{u^2}{2} + u\sqrt{\frac{u^2 + v^2}{4}} \\ &= uh \end{aligned}$$

und daher

$$x^2 - y^2 = u, 2xy = v\ .$$

□

1.4.5 Bemerkung. Beim Suchen nach einem Beweis geht man natürlich genau umgekehrt vor: Zuerst die Gleichungen lösen und dabei feststellen, welche Bedingungen nötig sind.

Kapitel 2

Funktionen, Folgen, Reihen und Grenzwerte

In diesem Kapitel werden grundlegende Begriffe wie Funktionen und Grenzwerte eingeführt. Unter anderem werden Standardbeispiele für Funktionen, wie Polynome und Kreisfunktionen diskutiert. Der Grenzwertbegriff wird an Hand von Zahlenfolgen und Funktionen genauer betrachtet.

2.1 Grundbegriffe

In Definition (1.1.4) im Kapitel 1 wurden Funktionen für allgemeine Mengen definiert. Nun betrachten wir den Spezialfall einer **reellen Funktion einer Veränderlichen**

$$f:\ D \to \mathbb{R}\ : x \mapsto f(x) \text{ für } D \subseteq \mathbb{R}\,. \tag{1.1}$$

Meist wird D ein Intervall sein.
Beispiele:

1 Eine **lineare Funktion** ist gegeben durch

$$f(x) = ax + b$$

für festes $a, b \in \mathbb{R}$ mit dem Definitionsbereich $D(f) = \mathbb{R}$.

2 Eine **quadratische Funktion** ist definiert als

$$f(x) = ax^2 + bx + c\,,$$

für festes $a, b, c \in \mathbb{R}$, wobei $a \neq 0$ und der Definitionsbereich $D(f) = \mathbb{R}$ ist.

3 Die **Wurzelfunktion** ist gegeben durch

$$f(x) = \sqrt{x}$$

mit dem Definitionsbereich $D(f) = \mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R}\,,\, x \geq 0\}$. Dies ist die Umkehrfunktion f^{-1} der bijektiven Funktion $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ mit $f(x) = x^2$.

2.1.1 Definition. *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ symmetrisch zum Nullpunkt, d.h. $x \in D \Rightarrow -x \in D$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt* **gerade** *(bzw.* **ungerade***) wenn $f(-x) = f(x)$ (bzw. $f(-x) = -f(x)$) für alle $x \in D$ gilt.*

2.1.2 Definition. *Man nennt eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$*

a) **monoton fallend** *(bzw.* **monoton wachsend***), wenn für alle $x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 < x_2$ die Ungleichung $f(x_1) \geq f(x_2)$ (bzw. $f(x_1) \leq f(x_2)$) gilt.*

b) **strikt monoton fallend** *(bzw.* **strikt monoton wachsend***), wenn für alle $x_1 < x_2 \in D$ die strikte Ungleichung $f(x_1) > f(x_2)$ (bzw. $f(x_1) < f(x_2)$) gilt.*

2.1.3 Rechnen mit Funktionen**.**

- *Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen. Dann definiert man die Summe, die Differenz, das Produkt und den Quotienten dieser Funktionen durch:*

$$\begin{aligned} (f \pm g)(x) &:= f(x) \pm g(x) \\ (f \cdot g)(x) &:= f(x) \cdot g(x) \\ \left(\frac{f}{g}\right)(x) &:= \frac{f(x)}{g(x)}\,, \qquad \textit{falls } g(x) \neq 0 \end{aligned} \tag{1.2}$$

  d.h. die Operationen werden punktweise ausgeführt.

- *Zu Funktionen $f : I \to \mathbb{R}$, $g : D \to \mathbb{R}$ mit $g(D) \subset I$ kann man die* **Komposition** *$f \circ g : D \to \mathbb{R}$ bilden. Sie ist definiert durch:*

$$(f \circ g)(x) := f(g(x)). \tag{1.3}$$

2.2 Polynome und rationale Funktionen

2.2.1 Definition. *Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt* **Polynom vom Grad** n*, wenn es Zahlen $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ gibt mit $a_n \neq 0$, so dass*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i. \tag{2.1}$$

- *Die a_i heißen* **Koeffizienten** *des Polynoms.*
- *$f(x) = 0$ hat keinen Grad, ist aber in der Sprechweise: „Polynome von Grad n“ eingeschlossen.*

2.2.2 Horner Schema**.** *Sei x_0 konkreter Wert. Um den Funktionswert $f(x_0)$ in Darstellung* (2.1) *zu berechnen, braucht man $2n-1$ Multiplikationen und n Additionen. Es gibt andere Darstellungen als* (2.1)*, z. B. die* **Horner–Darstellung***:*

$$f(x) = ((\cdots((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \cdots + a_1)x + a_0\,. \tag{2.2}$$

Hier beträgt der Aufwand n Multiplikationen und n Additionen.

2.2.3 Satz. *Sei $f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $a_n \neq 0$ und $b \in \mathbb{R}$. Für die Zahlen $c_n := a_n$, $c_{n-1} := c_n b + a_{n-1}$ bis $c_0 := c_1 b + a_0$ gilt*

$$\begin{aligned} f(b) &= c_0 \\ f(x) &= (x-b)\sum_{i=1}^{n} c_i x^{i-1} + c_0, \end{aligned} \tag{2.3}$$

d.h. das Horner Schema enthält die Division von $f(x) - f(b)$ durch $x - b$.

2.2.4 Definition. *Als* **Nullstelle** *einer Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ bezeichnet man jede Lösung der Gleichung*

$$f(x) = 0 \quad \text{in } D.$$

- *Für Polynome erhält man aus* (2.3)*:*

  $$f(b) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = (x-b)h(x),$$

  d.h. $f(x)$ ist teilbar durch den Linearfaktor $(x - b)$.

- *Nun kann $h(b)$ wiederum 0 sein. In diesem Fall gibt es ein Polynom h_1 mit $h(b) = (x-b)h_1(x)$. Damit gilt: $f(x) = (x-b)^2 h_1(x)$.*

2.2.5 Definition. *Man nennt $b \in \mathbb{R}$ eine* **k-fache Nullstelle** *von f und man nennt k die* **Vielfachheit** *von b, wenn gilt:*

$$f(x) = (x-b)^k g(x) \quad \text{und} \quad g(b) \neq 0. \tag{2.4}$$

2.2.6 Satz.

a) *Sei $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ ein Polynom vom Grad größer gleich eins. Sind $b_1, \ldots, b_r$ alle (verschiedenen) reellen Nullstellen von f mit der jeweiligen Vielfachheit $l_1, \ldots, l_r$, dann gilt*

$$f(x) = \prod_{i=1}^{r} (x-b_i)^{l_i} q(x) \tag{2.5}$$

mit einem Polynom $q(x)$ vom Grad $n - \sum\limits_{i=1}^{r} l_i$, das in $\mathbb{R}$ keine Nullstellen hat.

b) *Jedes Polynom vom Grad n mit $n \geq 1$ hat höchstens n Nullstellen.*

Beweis. Vollständige Induktion nach dem Grad des Polynoms. Der Induktionsschritt ist die Bemerkung nach Definition 2.2.4. □

2.2.7 Komplexe Polynome**.** *Eine Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt* komplexes Polynom vom Grad *n, wenn es Zahlen $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ gibt mit $a_n \neq 0$, so dass*

$$f(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i \tag{2.6}$$

Auch $f(z) = 0$ wird als Polynom aufgefasst.

- Alle Operationen, wie Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division, die für reelle Polynome definiert sind, werden analog für komplexe Polynome definiert.

- Der Grund für die Einführung der komplexe Zahlen war das Polynom x^2+1, welches in $\mathbb{R}$ keine Nullstelle hat. Wir haben gesehen, dass über $\mathbb{C}$ jede quadratische Funktion eine Nullstelle hat (Satz 1.4.4). Dies gilt sogar allgemein, wie der folgende Satz zeigt.

2.2.8 Theorem (Fundamentalsatz der Algebra)**.** *Zu jedem Polynom der Form* (2.6)*, mit $n \geq 1$ und $a_n \neq 0$, gibt es eine Zahl $w \in \mathbb{C}$ mit $f(w) = 0$.*

Der Beweis ist alles andere als einfach.
Die einzigen komplexen Polynome ohne komplexe Nullstelle sind also die konstanten Polynome. Wie im reellen Fall erhält man also:

2.2.9 Satz. *Jedes komplexe Polynom der Form* (2.6) *mit $n \geq 1, a_n \neq 0$ besitzt eine* **Faktorisierung über** $\mathbb{C}$ *der Form*

$$f(z) = a_n(z - w_1)^{l_1} \cdot \dots \cdot (z - w_k)^{l_k} \tag{2.7}$$

mit verschiedenen Nullstellen $w_i \in \mathbb{C}$ der Vielfachkeit l_i mit $\sum_{i=1}^{k} l_i = n$.

Jedes reelle Polynom kann als komplexes Polynom aufgefasst werden, da $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.

2.2.10 Lemma. *Sei $w \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle eines Polynoms f mit reellen Koeffizienten. Dann ist auch $\overline{w}$ eine Nullstelle von f.*

Beweis. Sei

$$f(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i \ .$$

Nach Voraussetzung ist $a_i \in \mathbb{R}$. Sei $w \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von f. Dann gilt

$$f(\bar{w}) = \sum_{i=0}^{n} a_i \bar{w}^i = \overline{\sum_{i=0}^{n} a_i w^i}$$

denn komplexe Konjugation vertauscht mit Multiplikation und Addition, und es gilt $a_i = \bar{a}_i$. Es gilt also

$$f(\bar{w}) = \overline{f(w)} = \bar{0} = 0 \ .$$

□

2.2.11 Satz. *Jedes reelle Poynom $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_k x^k, n \geq 1, a_k \in \mathbb{R}, a_n \neq 0$, besitzt die* **Faktorisierung über** $\mathbb{R}$

$$f(x) = a_n(x - b_1)^{l_1} \cdot \dots \cdot (x - b_r)^{l_r} (x^2 + c_1 x + d_1)^{k_1} \cdot \dots \cdot (x^2 + c_s x + d_s)^{k_s},$$

mit reellen Nullstellen $b_i \in \mathbb{R}$ der Vielfachkeit l_i und quadratischen Polynomen $x^2 + c_i x + d_i$, die keine reelle Nullstelle haben.

Beweis. Sei
$$f(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$$
mit $a_n \neq 0$. Nach dem Lemma treten die Nullstellen von f treten paarweise auf. Ist eine Nullstelle $w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, so enthält f den Faktor
$$(z-w)(z-\bar{w}) = z^2 - (w+\bar{w})z + w\bar{w} = z^2 - 2\mathrm{Re}(w)z + |w|^2 \ .$$
Dies ist ein reelles Polynom.
Wir benutzen die Faktorsierung über den komplexen Zahlen
$$f(z) = a_n(z-w_1)^{l_1} \cdot \cdots \cdot (z-w_k)^{l_k}$$
wobei die w_i die verschiedenen komplexen Nullstellen von f sind. Wir sortieren die w_i so, dass $w_1, \dots, w_r$ reell sind. Dies sind dann genau die b_i aus der Formulierung des Satzes.
Die Nullstellen $w_{r+1}, \dots, w_k$ sind nicht reell. Seien $w_{r+1}, \dots, w_{r+s}$ paarweise nicht komplex konjugiert, $w_{r+s+i} = \bar{w}_{r+i}$ die restlichen. (Es gilt also $r + 2s = k$.) Dann ist
$$z^2 + c_i z + d_i = (z - w_{r+i})(z - w_{r+s+i}) \ .$$
□

2.2.12 Satz. *Zu $(n+1)$ beliebigen Stützpunkten (x_i, y_i), $i = 0, \dots, n$, mit $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$, gibt es genau ein Polynom p_n mit Grad kleiner gleich n, so dass $p_n(x_i) = y_i, i = 0, \dots, n$.*

Beweis. Eindeutigkeit: Seien p_n, p'_n zwei solche Polynome. Dann gilt
$$(p_n - p'_n)(x_i) = y_i - y_i = 0 \quad i = 0, \dots, n$$
d.h. $p_n - p'_n$ ist ein Polynom vom Grad kleiner gleich n mit mindestens $n+1$ Nullstellen. Nach Satz 2.2.6 folgt hieraus, dass $p_n - p'_n = 0$. Der Existenzbeweis bedeutet das Lösen eines linearen Gleichungssystems. Es lohnt sich, das Verfahren festzuhalten, s.u. □

2.2.13. Newton Interpolationsverfahren. *Man suche das Polynom p_n aus Satz 2.2.12 in der Form*
$$\begin{aligned} p_n(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-x_0) + \alpha_2(x-x_0)(x-x_1) + \cdots + \\ + \alpha_n(x-x_0)(x-x_1) \cdot \cdots \cdot (x-x_{n-1}) \end{aligned} \tag{2.8}$$

Die Bedingung $p_n(x_i) = y_i$, $i = 0, \dots, n$, liefert das Gleichungssystem:

$$
\begin{aligned}
y_0 &= \alpha_0 \\
y_1 &= \alpha_0 + \alpha_1(x_1 - x_0) \\
&\vdots \\
y_n &= \alpha_0 + \alpha_1(x_n - x_0) + \cdots + \alpha_n(x_n - x_0) \cdot \cdots \cdot (x_n - x_{n-1})
\end{aligned}
$$

Dieses kann schrittweise von oben nach unten mit der Methode der **dividierten Differenzen** gelöst werden:

$$
\begin{array}{c|ccccc}
x_0 & y_0 & & & & \\
 & & y_{0,1} & & & \\
x_1 & y_1 & & y_{0,1,2} & & \\
 & & y_{1,2} & & & \\
x_2 & y_2 & & \vdots & \cdots & y_{0,1,\dots,n} \\
 & & \vdots & & & \\
 & & & y_{n-2,n-1,n} & & \\
\vdots & \vdots & y_{n-1,n} & & & \\
x_n & y_n & & & &
\end{array}
$$

Hierbei ist

$$
\begin{array}{lll}
y_{0,1} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}, & y_{1,2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, & \cdots \\
y_{0,1,2} = \frac{y_{1,2} - y_{0,1}}{x_2 - x_0}, & y_{1,2,3} = \frac{y_{2,3} - y_{1,2}}{x_3 - x_1}, & \cdots \\
\vdots & \vdots &
\end{array}
$$

Man kann nachrechnen, dass

$$\alpha_i = y_{0,1,\dots,i} \, ,$$

d.h. die gesuchten Koeffizienten stehen in der oberen Schrägzeile.

2.2.14 Folgerung. *Zwei Polynome sind genau dann gleich, wenn alle ihre Koeffizienten übereinstimmen, d.h.*

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i \qquad \Leftrightarrow \qquad a_i = b_i \quad i = 1, \dots, n.$$

Beweis. Seien $p = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ und $q = \sum_{j=0}^n b_i x^i$ Polynome vom Grad kleiner gleich n mit $p = q$ als Funktionen auf $\mathbb{R}$. Dann stimmen sie in $n+1$ verschiedenen Stützpunkten überein. Nach Satz 2.2.12 sind sie dadurch eindeutig bestimmt. $\square$

2.2.15. Polynomdivision. *Seien p und q Polynome, $q \neq 0$. Dann gibt es eindeutig bestimmte Polynome h und r mit* $\mathrm{Grad}(r) < \mathrm{Grad}\, q$ *so dass*

$$p = hq + r \ .$$

Der mathematische Beweis wird für festes q mit vollständiger Induktion nach dem Grad von p geführt. Wichtiger ist der Algorithmus, der dem der schriftlichen Division von Zahlen (mit Rest) entspricht.

2.2.16 Beispiel.

$$\begin{aligned} x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 \ &: \ x^2 + 2x \ = x^2 \qquad \text{Rest } -3x^3 + x^2 - x + 1 \\ -3x^3 + x^2 - x + 1 \ &: \ x^2 + 2x \ = -3x \quad \text{Rest } 8x^2 - x + 1 \\ 8x^2 - x + 1 \ &: \ x^2 + 2x \ = 8 \qquad \text{Rest } -17x + 1 \end{aligned}$$

und daher

$$h = x^2 - 3x + 8 \ , r = -17x + 1 \ .$$

2.2.17 Definition. *Der Quotient zweier Polynome*

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\sum_{i=0}^n a_i x^i}{\sum_{j=0}^m b_j x^j}, \qquad a_n \neq 0, b_m \neq 0,$$

heißt **rationale Funktion**.

Haben Zähler und Nenner eine Nullstelle gemeinsam, so kann man einen Linearfaktor kürzen, ohne die Funktion zu verändern.
• Sei $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ eine rationale Funktion, wobei $p(x)$ und $q(x)$ keine gemeinsamen Nullstellen haben. Dann ist der **maximale Definitionsbereich** der rationalen Funktion f gegeben durch

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \, : \, q(x) \neq 0\}. \tag{2.9}$$

Sei $b \in \mathbb{R}$ eine l-fache Nullstelle von $q(x)$, d.h.

$$q(x) = (x - b)^l q_1(x), \qquad \text{mit } q_1(b) \neq 0.$$

Dann nennt man b einen **l-fachen Pol** von f.

2.2.18 Satz. *Jede rationale Funktion* $\frac{p(x)}{q(x)}$ *lässt sich darstellen als*

$$\frac{p(x)}{q(x)} = h(x) + \frac{r(x)}{q(x)} \tag{2.10}$$

mit einem Polynom h *und einem Restpolynom* r *wobei entweder* $r = 0$ *oder* $\operatorname{Grad} r < \operatorname{Grad} q$.

Beweis. Gesucht sind h und r, so dass

$$p = hq + r \ ,$$

mit $\operatorname{Grad} r < \operatorname{Grad} q$, d.h. die Aussage ist äquivalent zur Polynomdivision mit Rest. □

2.3 Trigonometrische Funktionen

Wir erinnern uns, dass wir alle Winkel im Bogenmaß angeben, d.h. der Vollkreis hat Maß 2π.

2.3.1 Sinus, Cosinus**.** *Auf dem Einheitskreis drehe man einen Zeiger um den Winkel* α. *Dadurch zeigt der Zeiger auf den Punkt* P. *Die Koordinaten von* P *werden mit* $\cos\alpha$ *und* $\sin\alpha$ *bezeichnet.*

$$P = (\cos\alpha, \sin\alpha)$$

Da der Winkel $\alpha \in \mathbb{R}$ *beliebig ist erhalten wir die Funktionen:*

$$\begin{aligned} \cos : \mathbb{R} \to [-1,1] \ &: \ \alpha \mapsto \ \cos\alpha \qquad && \textbf{Cosinusfunktion}\,, \\ \sin : \mathbb{R} \to [-1,1] \ &: \ \alpha \mapsto \ \sin\alpha \qquad && \textbf{Sinusfunktion}\,. \end{aligned}$$

Der Zeiger habe nun die Länge r. *Nach einer Drehung um den Winkel* α *zeigt er nun auf den Punkt* $Q = (a, b)$. *Dieser hat die Koordinaten*

$$Q = (r\cos\alpha, r\sin\alpha) \ . \tag{3.1}$$

Diese Gleichungen kann man auch schreiben als

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{a}{r}\,, \\ \sin\alpha &= \frac{b}{r}\,. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Aus der Definition erhält man sofort folgende Eigenschaften:

$$\begin{aligned} -1 \le \cos x &\le 1, \\ \cos(-x) &= \cos x \qquad \text{(gerade Funktion)}, \\ \cos(x+2k\pi) &= \cos x \qquad \text{(2π-periodisch)}, \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} -1 \le \sin x &\le 1, \\ \sin(-x) &= -\sin x \qquad \text{(ungerade Funktion)}, \\ \sin(x+2k\pi) &= \sin x \qquad \text{(2π-periodisch)}, \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned} \cos x = 0 \qquad &\Leftrightarrow \qquad \pm\tfrac{1}{2}\pi,\ \pm\tfrac{3}{2}\pi,\ \pm\tfrac{5}{2}\pi, \dots, \\ \sin x = 0 \qquad &\Leftrightarrow \qquad 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots\ . \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \tag{3.6}$$

wobei $\sin^2(x) = (\sin(x))^2$.

2.3.2 Satz (Additionstheorem)**.** *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:*

$$\begin{aligned} \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y, \\ \sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Beweis. Wir setzen die definierenden rechtwinkligen Dreiecke aufeinander. Das erste hat die Ecken $(0,0)$, $(\cos x, 0)$ und $(\cos x, \sin x)$. Das zweite hat als erste Ecke $(0,0)$, als zweite einen Punkt P auf der Nullpunktsgeraden G durch $(\cos x, \sin x)$ mit Abstand $\cos y$ vom Nullpunkt. Die Gerade hat die Gleichung

$$t \mapsto \frac{\sin x}{\cos x}\, t\ .$$

Es gilt also

$$P = (\cos y \cos x, \cos y \sin x)\ .$$

Wir bestimmen die Gerade G', die senkrecht auf G steht und durch P geht. Sie hat die Steigung $-\frac{\cos x}{\sin x}$ und die Gleichung

$$t \mapsto -\frac{\cos x}{\sin x}\, t + \left(\cos y \sin x + \frac{\cos^2 x \cos y}{\sin x}\right)\ .$$

Die dritte Ecke Q liegt auf G' und hat von P den Abstand $\sin(y)$. Die Behauptung ist $Q = Q'$ mit

$$Q' = (\cos x \cos y - \sin x \sin y, \sin x \cos y + \cos x \sin y)\ .$$

Einsetzen zeigt, dass der Punkt auf G' liegt. Es gilt

$$\overrightarrow{PQ'} = Q' - P = (-\sin y \sin x, \cos x \sin y) \ .$$

Dieser Vektor hat die Länge $\sin y$ wie gewünscht. $\square$

- Der Spezialfall $y = \frac{\pi}{2}, bzw. \quad y = -\frac{\pi}{2}$ impliziert:

$$\begin{aligned} \sin\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) &= \cos x, \\ \cos\left(x - \tfrac{\pi}{2}\right) &= \sin x, \end{aligned} \tag{3.8}$$

  d.h. wenn man die Sinuskurve nach links um $\frac{\pi}{2}$ verschiebt erhält man die Cosinuskurve.

- In Formelsammlungen gibt es zahlreiche Identitäten, die sich aus (3.5) herleiten lassen. Hier einige Beispiele:

$$\begin{aligned} \cos(x-y) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y, \\ \sin(x-y) &= \sin x \cos y - \cos x \sin y, \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned} \sin x + \sin y &= 2 \sin \tfrac{x+y}{2} \, \cos \tfrac{x-y}{2}, \\ \cos x + \cos y &= 2 \cos \tfrac{x+y}{2} \, \cos \tfrac{x-y}{2}, \end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned} \cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1, \\ \sin 2x &= 2 \sin x \, \cos x, \end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned} 1 + \cos x &= 2\cos^2 \tfrac{x}{2}, \\ 1 - \cos x &= 2\sin^2 \tfrac{x}{2}, \end{aligned} \tag{3.12}$$

2.3.3 Polardarstellung komplexer Zahlen. *Man kann jede komplexe Zahl $z = x + iy$ auch als „Zeiger“ auffassen und deshalb ist z eindeutig bestimmt durch einen Winkel φ und den Betrag $r = |z|$.*

- Es gilt dann $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ und somit erhalten wir

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{3.13}$$

- Diese Form der Darstellung von z heißt **Polardarstellung**. Man nennt φ das **Argument** von z, $\varphi =: \arg z$. Falls $-\pi < \varphi \leq \pi$ heißt φ **Haupwert von** $\arg z$

- Die folgende abkürzende Schreibweise ist sinnvoll

$$e^{i\varphi} := \cos\varphi + i\sin\varphi, \quad \varphi \in \mathbb{R}. \tag{3.14}$$

  Sie heißt **Euler-Formel**.

Die Begründung für diese Notation liefern die Rechneregeln. Rechnung mit Sinus und Cosinus vereinfachen sich in der Notation der komplexen Zahlen.

2.3.4 Satz (De Moivre). *Für alle $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$ gilt,*

a) $e^{i\varphi}e^{i\psi} = e^{i(\psi+\varphi)}$,

b) $\left(e^{i\varphi}\right)^n = e^{in\varphi}, \quad n \in \mathbb{N}$,

c) $\overline{e^{i\varphi}} = e^{-i\varphi} = \frac{1}{e^{i\varphi}}$.

Beweis. Wir betrachten die erste Aussage:

$$\begin{aligned} e^{i\varphi}e^{i\psi} &= (\sin\varphi + i\cos\varphi)(\sin\psi + i\cos\psi) \\ &= \sin\varphi\sin\psi - \cos\varphi\cos\psi + i(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi) \end{aligned}$$

Nach der Additionsformel 2.3.2 ist dies

$$\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)\ .$$

□

- Die Multiplikation und Division komplexer Zahlen lässt sich daher besonders einfach in der Polardarstellung berechnen. Sei $z = |z|e^{i\varphi}$ und $w = |w|e^{i\psi}$, dann gilt:

$$\begin{aligned} z\cdot w &= |z||w|\,e^{i(\varphi+\psi)}, \\ \tfrac{z}{w} &= \tfrac{|z|}{|w|}\,e^{i(\varphi-\psi)}, \qquad \text{falls } w \neq 0. \end{aligned} \tag{3.15}$$

2.3.5 Definition. *Die* **Tangens- und Cotangensfunktionen** *sind definiert durch*

$$\begin{aligned} \tan x &:= \tfrac{\sin x}{\cos x} && \textit{mit } x \neq (2k+1)\tfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}, \\ \cot x &:= \tfrac{\cos x}{\sin x} && \textit{mit } x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

• Wir erhalten sofort folgende Eigenschaften:

$$\begin{aligned} \tan(-x) &= -\tan x, && \text{(ungerade Funktion)}, \\ \cot(-x) &= -\cot x, && \text{(ungerade Funktion)}, \end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned} \tan(x+\pi) &= \tan x, && \text{(π-periodisch)}, \\ \cot(x+\pi) &= \cot x, && \text{(π-periodisch)}, \end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}, \qquad \text{für „erlaubte“ } x, y. \tag{3.18}$$

2.3.6 Definition. *Eine Funktion* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *heißt* **periodisch** *mit einer* **Periode** $2l$*, wenn*

$$f(x+2l) = f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

2.3.7 Definition. *Als* **Schwingung***, bezeichnet man einen Vorgang, der durch eine periodische Funktion eines „Zeitparameters“* $t \in \mathbb{R}$ *beschrieben wird. Eine durch*

$$s(t) = A\cos(\omega t + \alpha)\ , \quad t \in \mathbb{R}$$

mit festem $A, \omega, \alpha \in \mathbb{R}$ *dargestellte Schwingung heißt* **harmonisch***.* A *heißt* **Amplitude***,* $\omega t + \alpha$ *die* **Phase***,* α *die* **Nullphase** *und* ω *die* **Kreisfrequenz***. Die* **Periode** *beträgt* $T = \frac{2\pi}{\omega}$ *und die* **Frequenz** $\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$.

- Die **Überlagerung (Superposition)** $s(t)$ zweier Schwingungen $s_1(t)$, $s_2(t)$ ist punktweise definiert, d.h. die Auslenkungen addieren sich

  $$s(t) := s_1(t) + s_2(t).$$

  Die Überlagerung $s(t)$ ist im Allgemeinen nicht mehr periodisch.

- Die Behandlung von harmonischen Schwingungen $s(t)$ vereinfacht sich, wenn man **komplexe Schwingungen** $z(t)$ einführt. Sei

  $$s(t) = A\cos(\omega t + \alpha),$$

dann definiert man

$$\begin{aligned} z(t) :&= A\cos(\omega t+\alpha) + iA\sin(\omega t+\alpha) \\ &= Ae^{i(\omega t+\alpha)} \\ &= ae^{i\omega t}. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Hierbei ist a gegeben durch $a := Ae^{i\alpha}$ und heißt **komplexe Amplitude**.

Wir überlagern zwei harmonische Schwingungen mit gleicher Kreisfrequenz, d.h.

$$s_1(t) = A_1\cos(\omega t+\alpha_1), \quad s_2(t) = A_2\cos(\omega t+\alpha_2)\ ,$$
$$s(t) = s_1(t) + s_2(t)\ .$$

Dies ist der Realteil von

$$\begin{aligned} A_1e^{i(\omega t+\alpha_1)} + A_2e^{i\omega t+\alpha_2} &= A_1e^{i\alpha_1}e^{i\omega t} + A_2e^{i\alpha_2}e^{i\omega t} \\ &= (A_1^{i\alpha_1} + A_2e^{i\alpha_2})e^{i\omega t}\ . \end{aligned}$$

Der erste Faktor ist eine komplexe Zahl, also von der Form $u+iv = Ae^{i\alpha}$ mit

$$u := A_1\cos\alpha_1 + A_2\cos\alpha_2, \qquad v := A_1\sin\alpha_1 + A_2\sin\alpha_2.$$

und dann $A = \sqrt{u^2+v^2}$, $\cos\alpha = \frac{u}{A}$, $\sin\alpha = \frac{v}{A}$. Hieraus ergibt sich

$$A_1e^{i(\omega t+\alpha_1)} + A_2e^{i\omega t+\alpha_2} = Ae^{i(\omega t+\alpha)}\ .$$

Damit haben wir hergeleitet:

2.3.8 Satz. *Besitzen zwei harmonische Schwingungen die gleiche Kreisfrequenz, d.h.*

$$s_1(t) = A_1\cos(\omega t+\alpha_1), \quad s_2(t) = A_2\cos(\omega t+\alpha_2),$$

so ist ihre Überlagerung $s(t)$ wieder eine harmonische Schwingung, die gegeben ist durch

$$s(t) := s_1(t) + s_2(t) = A\ \cos(\omega t+\alpha)$$

mit A und α wie oben.

- Auf Grund der Darstellungen $\omega_1 = \frac{\omega_1+\omega_2}{2} + \frac{\omega_1-\omega_2}{2}$ und $\omega_2 = \frac{\omega_1+\omega_2}{2} + \frac{\omega_2-\omega_1}{2}$ läßt sich die Überlagerung zweier komplexer Schwingungen immer als Produkt

$$a_1 e^{i\omega_1 t} + a_2 e^{i\omega_2 t} = \left(a_1 e^{i\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t} + a_2 e^{i\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t} \right) e^{i\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t} \tag{3.20}$$

  darstellen. Man nennt dies **modulierte Schwingung** mit **modulierter Amplitude**.

- Im Allgemeinen ist eine modulierte Schwingung nicht periodisch. Ist der Quotient $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2}$ jedoch eine rationale Zahl, so ist die modulierte Schwingung doch periodisch. In diesem Fall besitzen die Schwingungen $z_1(t) = a_1 e^{i\omega_1 t}$ und $z_2(t) = a_2 e^{i\omega_2 t}$ die gemeinsame Periode $T := \frac{2\pi n_1}{\omega_1} = \frac{2\pi n_2}{\omega_2}$, d.h. $z_1(t) + z_2(t)$ ist periodisch aber nicht notwendig harmonisch.

2.4 Zahlenfolgen und Grenzwerte

Das Herz der Analysis sind Grenzwerte. Wir fangen unsere Untersuchungen mit Folgen an und übertragen die Ergebnisse dann auf Funktionen.

2.4.1 Definition. *Unter einer* **Folge** *reeller Zahlen versteht man eine auf* $\mathbb{N}_0$ *erklärte Funktion, das heißt jedem* $n \in \mathbb{N}_0$ *ist ein* $a_n \in \mathbb{R}$ *zugeordnet. Man schreibt*

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \;;\; (a_n)_{n\geq 0}\,;\, a_0, a_1, a_2, \cdots$$

Die Zahlen a_n *heißen* **Glieder** *der Folge.*

Beispiele:

1) $a_n = c$ **konstante Folge** $c, c, \cdots$

2) $a_n = n$ **Folge der natürlichen Zahlen** $1, 2, 3, \cdots$

3) $a_n = a_0 + nd$ **arithmetische Folge** $a_0, a_0 + d, a_0 + 2d, \cdots$

4) $a_n = a_0\, q^n$ **geometrische Folge** $a_0, a_0\, q, a_0\, q^2, \cdots$

5) $a_0 = 1\,,\; a_{n+1} := (n+1)a_n$ **rekursiv definierte Folge**

2.4.2 Definition. *Man sagt, die Folge* $(a_n)_{n\geq 0}$ **konvergiert** *gegen den* **Grenzwert** $a \in \mathbb{R}$ *und schreibt*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \textit{oder} \quad a_n \to a,$$

wenn es zu jeder beliebig kleinen Schranke $\varepsilon > 0$ *einen Index* $n_0 \in \mathbb{N}_0$ *gibt, so dass gilt:*

$$|a_n - a| < \varepsilon \qquad \forall n \geq n_0,$$

d.h. alle Glieder ab einem bestimmten Index (dieser hängt von ε *ab!) liegen in einer* ε*-Umgebung von* a*.*

- *Falls der Grenzwert existiert heißt die Folge* **konvergent***, ansonsten* **divergent***.*
- *Falls* $a = 0$ *heißt die Folge* **Nullfolge***.*

2.4.3 Definition. *Man sagt, eine Folge* $(a_n)_{n\geq 0}$ **divergiert gegen** ∞*, in Zeichen*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty,$$

wenn für alle $K \in \mathbb{N}_0$ *ein* $n_0 \in \mathbb{N}$ *existiert, so dass* $a_n > K$ *für alle* $n \geq n_0$*. Analog definiert man:* **divergiert gegen -**∞*.*

2.4.4 Lemma. *Für alle* $x \in \mathbb{R}$ *gilt*

1) $\lim_{n\to\infty} x^n = 0, \qquad$ *falls* $|x| < 1$,

2) $\lim_{n\to\infty} x^n = \infty, \qquad$ *falls* $x > 1$,

3) Die Folge $(x^n)_{n\geq 0}$ *divergiert, falls* $x < -1$.

Beweis. Sei $x > 1$. Sei $K \in \mathbb{N}$. Wir setzen $x = 1 + y$ mit $y > 0$. Sei $n_0 \geq K/y$ eine natürliche Zahl. Für $n \geq n_0$ folgt mit der Bernoulli-Ungleichung (Beispiel 1.2.7):

$$(1+y)^n \geq 1 + ny > \frac{K}{y}y = K\ .$$

Die Folge divergiert gegen ∞.

Sei nun $|x| < 1$, $\varepsilon > 0$. Dann ist $|x|^{-1} > 1$. Nach dem ersten Teil gibt es n_0, so dass für alle $n \geq n$ gilt

$$(|x|^{-1})^n > \varepsilon^{-1} \Rightarrow |x^n| < \varepsilon \ .$$

Es handelt sich um eine Nullfolge.
Sei zuletzt $x < -1$. Die Folge hat abwechselnd Werte kleiner -1 und größer 1. Sie kann nicht konvergieren. □

Seien $(a_n)_{n\geq 0}, (b_n)_{n\geq 0}$ Folgen. Dann sind $a_n \pm b_n, a_n \cdot b_n$, und a_n/b_n neue Folgen. Zur Grenzwertberechnung sollte man zuerst überprüfen, ob die zu betrachtende Folge aus einfacheren Folgen zusammengesetzt ist.

2.4.5 Satz. *Sind $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ konvergente Zahlenfolgen mit $a_n \to a$ und $b_n \to b$, dann gilt:*

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = a \cdot b$,

c) ist $a \neq 0$, dann gibt es ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $a_n \neq 0$ für alle $n \geq n_1$ und für die Folgen $(a_n)_{n\geq n_1}$, $(b_n)_{n\geq n_1}$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{b}{a}$,

d) $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$,

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}\,$, *falls alle $a_n \geq 0$.*

Beweis. Alle Beweise gehen ähnlich. Wir zeigen die erste Aussage. Sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Wir wollen zeigen, dass $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$.
Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es n_0, so dass

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}\ , \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } n \geq n_0\ .$$

Dann gilt

$$|a_n + b_n - a - b| \leq |a - a_n| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } n \geq n_0\ .$$

□

2.4.6 Satz. *Lassen sich für alle $n \geq n_1$ die Glieder der Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ abschätzen durch $b_n \leq a_n \leq c_n$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = c$, dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$.*

2.4.7 Satz. *Seien $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ konvergente Folgen mit $a_n \leq b_n$ für alle $n \geq n_1$. Dann gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.*

Beweis. (überspringen) Sei $\varepsilon > 0$. Für $n \geq n_0$ gilt

$$|c - b_n| < \varepsilon, \quad |c - a_n| < \varepsilon \ .$$

Es folgt

$$|a_n - b_n| = |a_n - c + c - b_n| \leq |a_n - c| + |c - b_n| < 2\varepsilon \ .$$

Für $n \geq \max(n_0, n_1)$ folgt $|a_n - c_n| < 2\varepsilon$ und damit

$$|c - c_n| = |c - b_n + b_n - a_n + a_n - c_n| \leq |c - b_n| + |b_n - a_n| + |a_n - c_n| < 5\varepsilon \ .$$

□

2.4.8 Definition. *Eine Folge heißt* **beschränkt**, *wenn es Konstanten K_1, K_2 gibt, so dass*

$$K_1 \leq a_n \leq K_2 \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

• *Im obigen Beispiel sind die Folgen in 1) und 4) für $q < 1$ beschränkt. Die Folgen in 2), 3) für $d \neq 0$ und 5) sind unbeschränkt.*

2.4.9 Satz. *Für jede konvergente Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ gilt:*

1) Ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$, so gilt $a = b$.

2) Die Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ ist beschränkt.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung gibt es n_0, so dass

$$|a - a_n| < \varepsilon \ , \quad |b - a_n| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_0 \ .$$

Hieraus folgt mit der Dreicksungleichung

$$|a - b| = |a - a_n + a_n - b| < 2\varepsilon \ .$$

Da ε beliebig klein werden kann, folgt $|a - b| = 0$ d.h. $a = b$.
Für die zweite Aussage wählen wir wieder $\varepsilon > 0$. Dann gibt es n_0 so dass $|a - a_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. D.h. es gilt

$$a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \quad \text{für alle } n \geq n_0 \ .$$

Also gilt

$$\min(a_0, \ldots, a_{n_0-1}, a - \varepsilon) \leq a_n \leq \max(a_0, \ldots, a_{n_0-1}, a + \varepsilon) \text{ für alle } n \geq 0 \ .$$

□

• Da Folgen spezielle Funktionen sind wissen wir schon, was eine **monoton wachsende** (**bzw. monoton fallende**) Folge ist, nämlich wenn für alle $n \geq 0$ gilt $a_{n+1} \geq a_n$ (bzw. $a_{n+1} \leq a_n$).

2.4.10 Satz. *Jede monoton wachsende oder fallende, beschränkte Folge ist konvergent.*

Beweis. Sei $(a_n)_{n \geq 0}$ nach oben beschränkt und monoton wachsend. Wir setzen $a = \sup(\{a_n | n \geq 0\})$. Wir zeigen

$$a = \lim_{n \to \infty} a_n \ .$$

Es existiert nach dem Vollständigkeitsaxiom. Sei $\varepsilon > 0$. Nach Definition des Supremums gibt es ein n_0 mit $a_{n_0} \in (a - \varepsilon, a]$. Für jedes $n \geq n_0$ ist $a_n \geq a_{n_0}$, da die Folge monoton wächst. Da a obere Schranke ist, folgt $a_n \leq a$. Insgesamt also $a_n \in (a - \varepsilon, a]$. □

2.4.11 Beispiel. Sei $0 < x < 1$. Wir betrachten die Folge $a_n = x^n$ für $n \geq 0$. Die Folge ist monoton fallend, hat also einen Grenzwert a. Die Folge $b_n = x^{n+1}$ hat denselben Grenzwert. Es folgt aus den Rechenregeln für Grenzwerte

$$a = \lim_{n \to \infty} b_n = x \lim_{n \to \infty} a_n = a^2 \Rightarrow a = 0, 1 \ .$$

Wegen $a < a_1 = x < 1$ ist also $a = 0$.

2.4.12 Definition. *Ist* $(a_n)_{n \geq 0}$ *eine Folge und* $n_0 < n_1 < \cdots$ *eine aufsteigende Indexfolge, dann heißt die Folge* $a_{n_0}, a_{n_1}, \ldots$ **Teilfolge** *der Folge* $(a_n)_{n \geq 0}$.

2.4.13 Satz. *Jede beschränkte Folge* $(a_n)_{n \geq 0}$ *hat eine konvergente Teilfolge.*

Beweis. (überspringen). Sei $b_n = \sup(a_k | k \geq n)$. Die Folge ist beschränkt und monoton fallend. Also hat sie einen Grenzwert b. Wir bestimmen induktiv die Indices der Teilfolge n_m. Für jedes m gibt es einen Index $n_m > n_{m+1}$, so dass

$$|b - b_{n_m}| < \frac{1}{m} \ .$$

Dies ist die gesuchte Teilfolge. □

2.5 Unendliche Reihen

2.5.1 Definition. *Sei* $(a_k)_{k\geq 0}$ *eine Folge reeller Zahlen. Durch die Festsetzung*

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} a_k \tag{5.1}$$

wird eine Zahlenfolge $(S_n)_{n\geq 0}$ *definiert, die die zu* $(a_k)_{k\geq 0}$ *gehörende* ***unendliche Reihe*** *heißt und mit*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

bezeichnet wird. Die Zahlen a_k *heißen* ***Glieder*** *der Reihe, die Summen* S_n *heißen* ***Partialsummen****. Wenn* $(S_n)_{n\geq 0}$ *konvergiert (bzw. divergiert) sagt man, die Reihe* ***konvergiert*** *(bzw.* ***divergiert****). Falls*

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k = S$$

mit $S \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ *nennt man* S *die* ***Summe*** *der Reihe und schreibt*

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,. \tag{5.2}$$

Das Symbol $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ wird sowohl für die Folge der Partialsummen als auch für ihren Grenzwert benutzt (wenn letzterer existiert).

2.5.2 Beispiel Geometrische Reihe**.** Sei $x \in \mathbb{R}$. Die geometrische Reihe ist die Reihe

$$\sum_{i=0}^{\infty} x^n\ .$$

Ihre Partialsummen sind die endlichen geometrische Reihen:

$$s_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \begin{cases} \frac{1-x^{n+1}}{1-x}, & \text{falls } x \neq 1, \\ n+1, & \text{falls } x = 1. \end{cases}$$

Es können folgende Fälle auftreten:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n := \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} x^n = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & \text{falls } |x| < 1, \\ \infty, & \text{falls } x \geq 1, \\ \text{divergiert}, & \text{falls } x < -1. \end{cases} \tag{5.3}$$

2.5.3 Satz (Cauchy - Kriterium)**.** *Die Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *ist genau dann konvergent, wenn es zu jeder noch so kleinen Zahl* $\varepsilon > 0$ *einen Index* N_ε *gibt, so dass für alle* $n, m \geq N_\varepsilon$

$$|S_n - S_m| = |a_{m+1} + \cdots + a_n| < \varepsilon$$

gilt.

Beweis. (überspringen) Sei $S_n \to S$, d.h. für alle $\varepsilon > 0$ gibt es n_0, so dass für alle $n \geq n_0$:

$$|S_n - S| \leq \frac{\varepsilon}{2} .$$

Für $m, n \geq n_\varepsilon$ folgt

$$|S_n - S_m| \leq |S_n - S| + |S - S_m| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

Sei umgekehrt das Cauchy-Kriterium erfüllt. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es n_0, so dass $|S_n - S_m| < \varepsilon$ für alle $n, m \geq n_0$. Insbesondere ist $S_n \in (S_{n_0} - \varepsilon, S_{n_0} + \varepsilon)$ für alle $n \geq n_0$. Daher ist die Folge beschränkt. Nach Satz 2.4.13 gibt es eine konvergente Teilfolge $(S_{n_k})_{k\geq 0}$. Sei S deren Grenzwert. Dann gibt es k_0, so dass $|S_{n_k} - S| < \varepsilon$ für alle $k \geq k_0$. Ohne Einschränkung ist $n_{k_0} \geq n_0$. Sei $n \geq n_{k_0}$. Dann folgt

$$|S - S_n| \leq |S - S_{n_{k_0}}| + |S_{n_{k_0}} - S_n| < \varepsilon + \varepsilon .$$

Daher ist $S_n \to S$. □

2.5.4 Satz. *Die Glieder einer konvergenten Reihe bilden eine Nullfolge.*

Beweis. Wähle $m = n + 1$ im Cauchy-Kriterium. Oder explizit: Sei

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n .$$

Wir setzen $S_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es n_0, so dass

$$|S - S_n| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_0 .$$

Es folgt

$$|a_n| = |S_n - S_{n-1}| < |S_n - S| + |S - S_{n-1}| < 2\varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_0 + 1 .$$

□

2.5.5 Beispiel Harmonische Reihe**.** Die harmonische Reihe ist Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \ .$$

Wir betrachten die Folge $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$. Sie divergiert gegen ∞.

Beweis. Sei $K \in \mathbb{N}_0$, $m = 2K + 2$. Für jedes $n \geq 2^m$ gilt dann:

$$\begin{aligned}
s_n &\geq s_{2^m} \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \dots \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{m-1}+1} + \dots \frac{1}{2^m}\right) \\
&\geq 1 + \frac{1}{2} + 2\frac{1}{4} + 4\frac{1}{8} + \dots + 2^{m-1}\frac{1}{2^m} \\
&= 1 + m\frac{1}{2} = 1 + \frac{2K-1}{2} > K
\end{aligned}$$

□

2.5.6 Definition. *Eine Reihe heißt* ***alternierend****, wenn aufeinander folgende Reihenglieder unterschiedliche Vorzeichen haben, d.h.* $a_n \cdot a_{n+1} < 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}_0$ *gilt.*

2.5.7 Satz (Leibnitz - Kriterium)**.** *Für jede monoton fallende Nullfolge* $(a_n)_{n\geq 0}$ *konvergiert die alternierende Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$*.*

Beweis:

Beweis. (überspringen) Sei $S_n = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i a_i$ eine Partialsumme. Nach Voraussetzung ist

$$\begin{aligned}
S_{2n+2} - S_{2n} &= (-1)^{2n+2}(a_{2n+2} - a_{2n+1}) > 0 \ , \\
S_{2n+1} - S_{2n-1} &= (-1)^{2n+1}(a_{2n+1} - a_{2n}) < 0 \ .
\end{aligned}$$

Die Folge der S_{2n} ist streng monoton steigend und nach oben beschränkt durch S_1. Sei S der Grenzwert. Die Folge der S_{2n+1} ist streng monoton fallend und beschränkt durch S_0. Sei S' der Grenzwert. Da $|S_{2n} - S - 2n - 1| = |a_{2n}|$ eine Nullfolge ist, folgt leicht $S = S'$ und die Reihe konvergiert. □

2.5.8 Beispiel. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$ ist konvergent.

2.5.9 Satz. *Sei $c \in \mathbb{R}$ und seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a$, $\sum_{k=0}^{\infty} b_k = b$ konvergente Reihen. Dann gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k \pm b_k) = a \pm b; \quad \sum_{k=0}^{\infty} (ca'_k) = ca' .$$

Beweis. Satz 2.4.5. □

Elementare Operationen wie Klammern Setzen oder Weglassen und Umordnen der Glieder, die für endliche Reihen erlaubt sind, sind im Allgemeinen für unendliche Reihen nicht harmlos.

2.5.10 Satz. *In einer konvergenten Reihe darf man beliebig Klammern setzen, d.h.*

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \cdots = (a_1 + \cdots + a_{k_1}) + (a_{k_1+1} + \cdots + a_{k_2}) + \cdots .$$

2.5.11 Definition. *Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt* ***absolut konvergent****, wenn die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert. Reihen die konvergieren, aber nicht absolut konvergieren heißen* ***bedingt konvergent****.*

2.5.12 Satz. *Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent.*

Beweis. Dies ist eine Anwendung des Cauchy-Kriterium und der Beobachtung

$$|\sum_{i=n}^{m} a_i| \leq \sum_{i=n}^{m} |a_i| .$$

□

2.5.13 Satz. *Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ist genau dann absolut konvergent, wenn die Folge der Partialsummen $S_n = \sum_{k=0}^{n} |a_k|$ beschränkt ist.*

Beweis. Satz 2.4.10, denn die Folge der S_n ist monoton wachsend. □

2.5.14 Definition. *Es sei $\sigma : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ eine bijektive Abbildung und $b_k = a_{\sigma(k)}$. Dann heißt die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ eine* ***Umordnung*** *der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$*

- Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ist also auch eine Umordnung der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$, denn $\sigma^{-1} : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ ist wieder bijektiv und $b_{\sigma^{-1}(k)} = a_k$.

2.5.15 Satz. *Ist die Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *absolut konvergent mit der Summe* S*, dann konvegiert jede Umordnung dieser Reihe ebenfalls gegen* S*.*

2.5.16 Satz. *Für absolut konvergente Reihen* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$*,* $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ *gilt die Cauchysche Produktformel*

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right).$$

Wir wenden uns weiteren Konvergenzkriterien zu.

2.5.17 Satz (Vergleichskriterium)**.** *Besteht für die Reihenglieder die Abschätzung*

$$0 \le |a_k| \le b_k \quad \text{für} \quad k \ge k_0$$

dann gilt:

a) $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ *konvergent* $\Rightarrow$ $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *absolut konvergent,*

b) $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| = \infty$ $\Rightarrow$ $\sum_{k=0}^{\infty} b_k = \infty.$

Beweis. Wir wenden das Cauchykriterium an und beachten

$$|\sum_{k=n}^{m} a_k| \le \sum_{k=n}^{m} |a_k| \le \sum_{k=n}^{m} b_k \; .$$

□

Wir wenden dieses Konvergenzkriterium auf die eine Reihe, deren Konvergenz wir verstanden haben, nämlich die geometrische Reihe:

2.5.18 Satz (Quotientenkriterium)**.** *Sei* $a_k \ne 0$ *für alle* $k \ge k_0$ *und sei* $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k+1}{a_k}\right| = a$*. Dann gilt:*

i) $a < 1$ $\Rightarrow$ $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *ist absolut konvergent,*

ii) $a > 1$ $\Rightarrow$ $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *ist divergent.*

Beweis. Sei $\lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1$. Dann gibt es $q \in (0,1)$ mit $\left|\frac{a_k+1}{a_k}\right| \leq q$ für alle $k \geq k_1$.

$$|a_{k_1+l}| \leq q\,|a_{k_1+l-1}| \leq q^2\,|a_{k_1+l-2}| \leq \cdots \leq q^l\,|a_{k_1}|$$

Wir wenden nun das Vergleichskriterium an auf

$$b_k := |a_{k_1}|\,q^{k-k_1}\ .$$

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergiert als geometrische Reihe. □

- Die Bedingung kann nicht durch $\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq 1$ ersetzt werden!

2.5.19 Beispiel. Wir betrachten die Reihe

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\ .$$

Es gilt $a_{k+1}/a_k = 1/(k+1)$. Dies ist eine Nullfolge. Nach dem Quotientenkriterium konvergiert sie, und man definiert die **Eulersche Zahl** e durch

$$\mathrm{e} := \sum_{k=0}^{\infty}\tfrac{1}{k!} = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\tfrac{1}{k!}\right). \tag{5.4}$$

Die Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ konvergiert sehr schnell. Man kann zeigen, dass die Eulersche Zahl e auch der Grenzwert der Folge $(b_n)_{n\geq 1}$ mit $b_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ist, d.h.

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n. \tag{5.5}$$

Die Folge $(b_n)_{n\geq 1}$ konvergiert sehr langsam.

2.5.20 Satz (Wurzelkriterium)**.** *Es sei* $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|} = a$. *Dann gilt*

a) $a < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ *ist absolut konvergent,*

b) $a > 1 \quad \Rightarrow \quad \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ *ist divergent.*

Beweis. Ebenfalls Vergleich mit einer geometrischen Reihe. □

2.6 Potenzreihen

2.6.1 Definition. *Sei $(f_n)_{n\geq 0}$ eine auf dem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ definierte Funktionenfolge. Falls für alle $x \in I$ die Zahlenfolge $(f_n(x))_{n\geq 0}$ den Grenzwert $f(x)$ besitzt, sagt man, dass die Funktionenfolge $(f_n)_{n\geq 0}$* ***punktweise gegen f konvergiert****.*

Es gibt also für jedes $x \in I$ und jedes $\varepsilon > 0$ ein n_0, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$. Der Index n_0 hängt also bei punktweiser Konvergenz von x ab.

2.6.2 Definition. *Eine Funktionenfolge $(f_n)_{n\geq 0}$* ***konvergiert gleichmäßig*** *auf I gegen die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, wenn es für alle $\varepsilon > 0$ einen Index n_0 gibt, so dass für alle $x \in I$ und alle $n \geq n_0$ gilt:*

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Mit diesem Konvergenzbegriff übertragen sich schöne Eigenschaften der Folge wie Stetigkeit auf den Grenzwert.

2.6.3 Satz. *Gilt für jede Funktion f_k der auf dem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ definierten Funktionenfolge $(f_k)_{k\geq 0}$ eine Abschätzung*

$$|f_k(x)| \leq M_k$$

und gilt für die Zahlenreihe $(M_k)_{k\geq 0}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} M_k < \infty,$$

dann ist die Funktionenreihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ auf I gleichmäßig und absolut konvergent.

Beweis. Genau wie Satz 2.5.17, also mit dem Cauchykriterium. □

Eine Funktionenreihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ mit den speziellen Funktionen $f_k(x) = a_k x^k$ heißt **Potenzreihe**.

2.6.4 Beispiel. (geometrische Reihe)

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots$$

konvergiert nach Beispiel 2.5.2 in $x \in (-1,1)$ punktweise gegen $1/(1-x)$. Sie konvergiert dort aber nicht gleichmäßig. Wir werden die korrekte Aussage gleich allgemein formulieren.

2.6.5 Definition. *Sei* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *,* $x \in \mathbb{R}$*, eine Potenzreihe und sei*

$$M := \left\{ x \in \mathbb{R};\ \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \ \textit{konvergiert} \right\}.$$

Der ***Konvergenzradius*** R *der Potenzreihe ist definiert durch*

$$R := \begin{cases} \sup\{|x|\,;\, x \in M\} & \textit{falls } M \textit{ beschränkt,} \\ \infty & \textit{falls } M \textit{ unbeschränkt.} \end{cases}$$

• *Für* R *gibt es drei Möglichkeiten:*

$$R = 0, \qquad 0 < R < \infty, \qquad R = \infty.$$

2.6.6 Satz. *Sei* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *eine Potenzreihe mit Konvergenzradius* R*. Dann gilt:*

a) $R = 0 \quad \Leftrightarrow \quad$ *Reihe konvergiert nur für* $x = 0$*.*

b) Ist $R > 0$ *und* $\varrho \in (0, R)$*, dann konvergiert die Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *absolut und gleichmäßig auf* $|x| \leq \varrho$*.*

c) Für alle x *mit* $|x| > R$ *ist die Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *divergent.*

Beweis. Der interessante Teil ist b). Sei $\sum_{k=0} a_k x^k$ konvergent in einem Punkt x_0 mit $R \geq |x_0| > \varrho$. Insbesondere ist $|a_k x_0^k|$ eine Nullfolge, also beschränkt durch ein $c > 0$. Sei nun $|x| \leq \varrho$. Für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ folgt

$$\left|a_k x^k\right| = |a_k|\,|x_0|^k \left|\frac{x}{x_0}\right|^k \leq c q^k$$

mit $q := \left|\frac{x}{x_0}\right|^k < 1$. Nach Kriterium Satz 2.6.3 konvergiert die Reihe absolut und gleichmäßig auf $[-\varrho, \varrho]$. $\square$

• Der Satz sagt nichts über $|x| = R$ aus. Die Punkte $x = -R$ und $x = R$ müssen für jede Reihe neu untersucht werden.

2.6.7 Berechnung des Konvergenzradius**.** *Der Konvergenzradius kann immer durch folgende Formel berechnet werden:*

$$R = \sup\left\{r \geq 0;\ \textit{die Folge}\ (|a_n|\, r^n)_{n\geq 0}\ \textit{ist beschränkt}\right\},$$

wobei $R = \infty$ falls die Menge unbeschränkt ist. Oft ist es einfacher folgende Formeln zu benutzen:

a) Sei $a_k \neq 0$ für $k \geq k_0$ und sei

$$a = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|.$$

Dann ist der Konvergenzradius $R = \frac{1}{a}$ falls $a \neq 0$ und $R = \infty$ falls $a = 0$.

b) Sei

$$a = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}\,,$$

dann ist $R = \frac{1}{a}$ falls $a \neq 0$ und $R = \infty$ falls $a = 0$.

2.6.8 Beispiel.

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k\ ,$$

$$f'(x) = -\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1}\ ,$$

$$f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{k=2}^{\infty} k\,(k-1)\,x^{k-2}$$

haben Konvergenzradius 1.

2.6.9 Satz. *Die Potenzreihe*

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

hat Konvergenzradius ∞. Die hierdurch definierte **Exponentialfunktion** *erfüllt die Funktionalgleichung*

$$\exp(x)\exp(y) = \exp(x+y)\ .$$

Beweis. Mit $a_k = 1/k!$ gilt $\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim \frac{1}{k} = 0$. Insbesondere konvergiert die Reihe für jede reelle Zahl absolut. Wir multiplizieren mit dem Cauchy-Produkt Satz 2.5.16:

$$\begin{aligned}
\exp(x)\exp(y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{y^l}{l!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k+l=n} \frac{x^k y^l}{k!l!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k+l=n} \binom{n}{k} x^k y^l \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \exp(x+y) \ .
\end{aligned}$$

□

Die Exponentialfunktion definiert die Potenzen der Eulerschen Zahl e (siehe Beispiel 2.5.19) bezüglich aller reellen Zahlen x.

2.6.10 Bemerkung. Tatsächlich gelten alle Sätze dieses Abschnitts wörtlich und mit denselben Beweisen für Folgen $(a_n)_{n\geq 0}$ komplexer Zahlen, Folgen $(f_n)_{n\geq 0}$ von komplexwertigen Funktionen und für Potenzreihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ mit komplexen Koeffizienten. Insbesondere definiert die Exponentialreihe eine Funktion

$$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \ .$$

Auch die Funktionen Sinus und Cosinus lassen sich als Potenzreihen schreiben, wie wir später zeigen werden:

$$\begin{aligned}
\sin(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \ , \\
\cos(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} \ .
\end{aligned}$$

Wegen der Potenzreihenidentität

$$\exp(iz) = \cos(z) + i\sin(z)$$

wird aus der Schreibweise $\mathrm{e}^{i\varphi} = \sin\varphi + i\cos\varphi$ nun ein echter Satz.

Kapitel 3

Stetigkeit und Differentation

Die Differentialrechnung ist eines der wichtigsten Hilfsmittel in der Mathematik selbst und in der mathematischen Behandlung von Problemen aus Wissenschaft und Technik. Insbesondere wird sie in diesem Kapitel zur Kurvendiskussion und zur Extremwertbestimmung benutzt.

3.1 Funktionengrenzwerte, Stetigkeit

Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $a \in I \cup \{-\infty, \infty\}$ und $f : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Uns interessiert das Verhalten von f, wenn x sich a nähert, wobei $x \neq a$.

3.1.1 Definition. *Die Funktion f hat für x gegen a den* **rechtsseitigen Grenzwert** *(bzw.* **linksseitigen Grenzwert***) c, in Zeichen $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = c$ (bzw. $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = c$), wenn für jede Folge $(x_n)_{n \geq 0}$ aus I mit $x_n \to a$ und $a < x_n$ für alle n (bzw. $x_n \to a$ und $x_n < a$ für alle n) die Folge $(f(x_n))_{n \geq 0}$ den Grenzwert c hat. f hat für x gegen a den* **Grenzwert** *c, in Zeichen $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$, wenn gilt $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = c$. Für $\alpha = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \alpha$ schreiben wir auch*

$$f(x) \xrightarrow{x \to a^+} \alpha$$

(ebenso für $x \to a^-$, $x \to a$).

3.1.2 Bemerkung. Diese Definition von $\lim_{x \to a}$ weicht von der Standarddefinition in Mathematikbüchern ab. Dort wird zusätzlich $f(a) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ verlangt. Wir folgen weiterhin unserer Hauptquelle Meyberg-Vachenauer.

3.1.3 Beispiel. 1. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 & x > 1 \end{cases} .$$

Dann gilt

$$\lim_{x \to a} f(x) = \begin{cases} 0 & a < 0 \\ 1 & a > 0 \end{cases}$$

und

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0 \ , \ \lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 \ .$$

Der jeweilige Funktionswert $f(a)$ spiele keine Rolle in den Berechnungen!

2. Wir betrachten $f = \cos$, $a = 0$.

$$\lim_{x \to 0} \cos x = 1 \ .$$

Da die Funktion gerade ist, genügt es $x \to 0^+$ zu betrachten. Wir behandeln zunächst die Nullfolge 2^{-n} für $n \geq 1$. Sie ist streng monoton fallend. Aus der Dreieckskonstruktion ist klar, dass cos auf $[0, \pi/2]$ streng monoton fallend ist. Daher ist $\cos 2^{-n}$ streng monoton wachsend. Gleichzeigt ist cos beschränkt, daher hat die Folgen einen Grenzwert α. Nach den Rechenregeln für Cosinus (Gleichung 3.11) ($\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$) erfüllt er

$$\alpha = 2\alpha^2 - 1 \Rightarrow \alpha = 1, -\frac{1}{2} \ .$$

Da $\cos 2^{-n} \geq 0$ für alle n, folgt $\alpha = 1$.

Sei $(x_n)_{n \geq 0}$ mit $x_n > 0$ eine beliebige Nullfolge. Sei $\varepsilon > 0$. Wir wählen N, so dass $1 - \cos 2^{-N} < \varepsilon$. Dies ist möglich, da $\alpha = 1$. Da $(x_n)_{n \geq 0}$ eine Nullfolge ist, gibt es zu 2^{-N} ein n_0, so dass $x_n < 2^{-N}$ für alle $n \geq n_0$. Wegen der Monotonie von cos folgt

$$\cos x_n \geq \cos 2^{-N} \Rightarrow 1 - \cos x_n \leq 1 - \cos 2^{-N} \leq \varepsilon \ .$$

3.1.4 Satz. *Aus* $\lim_{x \to a} f(x) = c\,,\ \lim_{x \to a} g(x) = d$*, mit* $c, d \in \mathbb{R}$ *folgt:*

a) $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = c \pm d$,

b) $\lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = c \cdot d$,

c) $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{c}{d}$, *falls* $d \neq 0$.

Dies gilt auch für $a = \pm\infty$ *und einseitige Grenzwerte,* $x \to a^+, x \to a^-$ *aber nur für endliche Grenzwerte* c, d.

Beweis. Wir beweisen beispielhaft die erste Aussage. Sei $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \alpha$, $\lim\limits_{x \to a^+} g(x) = \beta$. Wir betrachten eine Folge $(x_n)_{n \geq 0}$ mit $x_n \in I$, $x_n > a$. Nach Voraussetzung gilt

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \alpha \ , \ \lim_{n \to \infty} g(x_n) = \beta \ .$$

Nach den Rechenregeln für Grenzwerte in Satz 2.4.5 folgt

$$\lim_{n \to \infty} (f + g)(x_n) = \lim_{n \to \infty} f(x_n) + \lim_{n \to \infty} g(x_n) = \alpha \pm \beta \ .$$

Nach Definition ist also

$$\lim_{x \to a^+} (f + g)(x) = \alpha \pm \beta \ .$$

□

3.1.5 Satz. *Wenn* $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ *für alle* x *in der Nähe von* a *gilt (bzw. für alle hinreichend großen* x*) und wenn* $g(x) \to c$, $h(x) \to c$ *für* $x \to a$ *(bzw.* $x \to \infty$*), dann gilt auch* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$ *(bzw.* $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = c$*).*

Beweis. Folgt aus Satz 2.4.6. □

3.1.6 Beispiel. Es gelten:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \tag{1.1}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0. \tag{1.2}$$

Beweis. Wir behandeln die erste Gleichung: Wir betrachten den Kreissektor des Einheitskreises mit Winkel x. Er hat den Flächeninhalt

$$\frac{x}{2\pi}1^2\pi = \frac{x}{2} \ .$$

Er wird nach unten abgeschätzt durch die Fläche des rechtwinklingen Dreiecks mit Kantenlänge $\cos x$, nach oben durch das Dreieck mit Kantenlänge 1. Also

$$\frac{1}{2}\cos x \sin x \leq \frac{x}{2} \leq \frac{1}{2}1\tan x \ .$$

Hieraus folgt

$$\frac{1}{\cos x} \geq \frac{\sin x}{x} \leq \cos x \ .$$

Wegen $\lim\limits_{x\to 1} = 1$ folgt die Behauptung. □

3.1.7 Asymptoten**.**

a) Man nennt die Gerade $x = a$ eine **vertikale Asymptote** *der Kurve $y = f(x)$, wenn beim Grenzübergang $x \to a^+$ oder $x \to a^-$ die Funktionswerte $f(x)$ gegen ∞ oder $-\infty$ streben.*

b) Die Gerade $y = c$ heißt **horizontale Asymptote** *der Kurve $y = f(x)$, wenn $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = c$ oder $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = c$ gilt.*

c) Als **schräge Asymptote** *der Kurve $y = f(x)$ bezeichnet man die Gerade $y = px+q$, falls $p \neq 0$ und $f(x)-(px+q) \to 0$ für $x \to \infty$ oder $x \to -\infty$.*

3.1.8 Definition. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Die Funktion f heißt* **im Punkt** $x_0 \in I$ **stetig***, wenn $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.*

- *Falls x_0 ein Randpunkt des Intervalls ist, so ist der Grenzwert nur einseitig zu verstehen.*

- *Die Funktion f heißt* **auf** I **stetig***, wenn sie in jedem Punkt $x_0 \in I$ stetig ist.*

3.1.9 Satz.

a) Sind f und g auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ stetig, so gilt das auch für $f \pm g$ und $f \cdot g$. Ferner ist $\frac{f}{g}$ stetig in allen $x \in I$ mit $g(x) \neq 0$.

b) Sind $f : I \to \mathbb{R}$, $g : D \to \mathbb{R}$ stetig mit $g(D) \subseteq I$, dann ist auch die Komposition $h : D \to \mathbb{R}$, $h = f \circ g$ auf D stetig.

Beweis. Folgt aus Satz 3.1.4. □

3.1.10 Korollar. *a) Jedes Polynom $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.*

b) Seien p, q Polynome, die teilerfremd sind. Dann ist die rationale Funktion $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ stetig in allen Punkten $x \in \mathbb{R}$ mit $q(x) \neq 0$.

Beweis. Aus den Rechenregeln und der Stetigkeit der Identität $x \mapsto x$. □

3.1.11 Satz. *Für jede auf einem abgeschlossenen beschränkten Intervall $a \leq x \leq b$ stetige Funktion gilt:*

a) **Schrankensatz:** *Es gibt eine Schranke K mit $|f(x)| \leq K$ für alle $x \in [a, b]$.*
(Man sagt: f ist auf $[a, b]$ beschränkt.)

b) **Satz vom Maximum und Minimum:** *Es gibt stets Werte $x_0, x_1 \in [a, b]$, so dass $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$ für alle $x \in [a, b]$.*
(Man sagt: f nimmt auf $[a, b]$ immer sein Minimum und sein Maximum an.)

c) **Zwischenwertsatz:** *Zu jeder Zahl c zwischen dem Minimum $f(x_0)$ und dem Maximum $f(x_1)$ gibt es wenigstens ein $\bar{x} \in [a, b]$ mit $f(\bar{x}) = c$.*
(Man sagt: f nimmt jeden Wert zwischen seinem Minimum und Maximum an.)

d) **Die gleichmäßige Stetigkeit:** *Zu jeder beliebig kleinen Zahl $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass zwei Funktionswerte sich um höchstens ε unterscheiden, sobald die Argumente weniger als δ voneinander entfernt sind, d.h.*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \Big(\quad |x - x'| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| \leq \varepsilon \Big) .$$

Ein besonders wichtiger Fall des Zwischenwertsatzes ist dieser:

3.1.12 Korollar. *Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und haben $f(a)$ und $f(b)$ verschiedene Vorzeichen, dann gibt es wenigstens eine Nullstelle $\bar{x} \in (a, b)$ von f, d.h. $f(\bar{x}) = 0$.*

Wir beweisen den Zwischenwertsatz, da der Beweis auch einen sehr wichtigen Algorithmus enthält, die **Intervallhalbierung** oder **Bisektion**.

Beweis des Zwischenwertsatzes:. Zunächst zeigen, wir dass der Zwischenwertsatz aus dem Korollar folgt.
Sei $I = [a, b]$,

$$\inf_{x \in I} f(x) \leq c \leq \sup_{x \in I} f(x) \ .$$

Wir ersetzen f durch $f - c$. Nach Voraussetzung gibt es x_0 und x_1 mit $f(x_0) - c < 0 < f(x_1) - c$. Wir wenden das Korollar auf das Intervall $[x_0, x_1]$ (bzw. $[x_1, x_0]$) an. Es existiert also eine Nullstelle $\bar{x}$ von $f - c$. Es gilt $f(\bar{x}) = c$.
Sei also nun $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion so, dass $f(b) \cdot f(a) < 0$. Sei ohne Einschränkung $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. Wir konstruieren zwei Folgen $a_n < b_n$ mit $f(a_n) < 0$ und $f(b_n) > 0$.
Sei $a_0 = a$, $b_0 = b$. Wir betrachten $c = \frac{a+b}{2}$. Falls $f(c) = 0$, so haben wir eine Nullstelle gefunden und sind fertig. Falls $f(c) > 0$, so setzen wir $a_1 = a$, $b_1 = c$. Falls $f(c) < 0$, so setzen wir $a_1 = c$, $b_1 = b_0$. Wir wiederholen das Verfahren iterativ.
Seien a_n und b_n konstruiert. Sei $c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$. Falls $f(c_n) = 0$, so ist die Nullstelle gefunden. Falls $f(c_n) > 0$, so setzen wir $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = c_n$. Falls $f(c_n) < 0$, so setzen wir $a_{n+1} = c_{n+1}$, $b_{n+1} = b_n$.
Die Folge $(a_n)_{n \geq 0}$ ist nach oben beschränkt und monoton wachsend. Sei $\bar{x}$ der Grenzwert. Die Folge $(b_n)_{n \geq 0}$ ist nach unten beschränkt und monoton fallend. Sei $\bar{y}$ der Grenzwert. Wegen

$$|a_{n+1} - b_{n+1}| = \frac{1}{2} |a_n - b_n| = \frac{1}{2^n} |a - b|$$

stimmen die beiden Grenzwerte überein. Da f stetig ist, gilt

$$f(\bar{x}) = \lim_{n \to \infty} f(a_n) = \lim_{n \to \infty} f(b_n) \ .$$

Wegen $f(a_n) < 0$ für alle n gilt

$$f(\bar{x} = \lim_{n \to \infty} f(a_n) \leq 0 \ .$$

Wegen $f(b_n) > 0$ für alle n gilt

$$f(\bar{x} = \lim_{n \to \infty} f(b_n) \geq 0 \ .$$

Damit ist $\bar{x}$ die gesuchte Nullstelle. □

Bisektion erlaubt also die Bestimmung einer Nullstelle mit jeder gewünschten Genauigkeit. Das Verfahren ist schnell.

3.2 Die Ableitung

3.2.1 Definition. *Die Funktion f sei auf dem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ definiert und es sei $x_0 \in I$. Man sagt,* f **ist in** x_0 **differenzierbar**, *wenn der Grenzwert*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{2.1}$$

existiert und endlich ist. Dieser Grenzwert wird mit $f'(x_0)$ bezeichnet.

- Man nennt $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} := \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ den **Differenzenquotienten**. Man kann (1.2) auch durch $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ersetzen.
- andere Bezeichnungen: $\frac{d\,f(x_0)}{dx}$, $\frac{d}{dx} f$ In der Physik nennt man die Variable oft t (Zeit) und schreibt dann $\dot{f}$.
- Falls f in jedem Punkt $x_0 \in I$ differenzierbar ist, sagt man dass f auf I **differenzierbar** ist. Die so definierte Funktion $f' : I \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$ heißt **Ableitung von** f.
- Falls die Ableitung f' existiert und stetig ist, so heißt f **stetig differenzierbar**.

Beispiele:

$f(x)$	$f'(x)$	
c	0	
$ax + b$	a	
x^n	nx^{n-1}	für $n \in \mathbb{N}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	für $x > 0$

(2.2)

3.2.2 Geometrische Interpretation**.** *Sei $y = f(x)$ eine gegebene Funktion. Dann ist* $\tan \varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ *der Anstieg der Sekante durch die Punkte* $(x_0, f(x_0))$, $(x, f(x))$.
Der Grenzwert $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ *ist der Anstieg der Tangente an $y = f(x)$ im Punkt $(x_0, f(x_0))$, d.h. die Tangente des Graphen $y = f(x)$ hat im Punkt $(x_0, f(x_0))$ die Formel*

$$y = f'(x_0)\,(x - x_0)\, + f(x_0). \tag{2.3}$$

3.2.3 Analytische Interpretation**.** *Sei $y = f(x)$ eine gegebene Funktion und $(x_0, f(x_0))$ ein Punkt. Wir suchen die „beste“ lineare Approximation von f in der Nähe von x_0, d.h. eine lineare Funktion $g(x)$, so dass*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - g(x)}{x - x_0} = 0, \tag{*}$$

d.h. der Fehler $f(x) - g(x)$ strebt schneller gegen Null als $x - x_0$. Die Funktion g ist linear und somit gegeben durch $g(x) = m(x - x_0) + f(x_0)$. Aus (*) erhalten wir $m = f'(x_0)$, d.h. die Tangente (2.3) *ist die "beste" lineare Approximation von $f(x)$ nahe $(x_0, f(x_0))$.*

3.2.4 Satz. *Jede in $x_0 \in I$ differenzierbare Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ ist in x_0 auch stetig.*

Beweis. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar in x_0, also existiert

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ .$$

Sei $h(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$. Es gilt dann wie in 3.2.3

$$\lim_{x \to x_0} \frac{h(x)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + f'(x_0) = 0 \ .$$

Hieraus folgt

$$h(x) = \frac{h(x)}{x - x_0}(x - x_0) \xrightarrow{x \to x_0} 0 \cdot 0 = 0 \ ,$$

also

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + h(x) \xrightarrow{x \to x_0} f(x_0) + 0 + 0 \ .$$

□

• Stetigkeit von f ist **nicht** hinreichend für Differenzierbarkeit!

3.2.5 Satz. *Sind Funktionen $f, g : I \to \mathbb{R}$ im Punkt $x \in I$ differenzierbar, so gilt:*

a) $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$,

b) $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,

c) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)\,g'(x)}{g^2(x)}$, *falls* $g(x) \neq 0$.

d) $\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$, *falls* $g(x) \neq 0$.

Beweis. Wir zeigen beispielhaft die zweite Aussage im Punkt x_0. Nach Voraussetzung ist

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + r(x)\ , g(x) = g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + s(x)$$

mit

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r(x)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{s(x)}{x - x_0} = 0\ .$$

Es folgt

$$f(x)g(x) = f(x_0)g(x_0) + [f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0)](x - x_0) + t(x)$$

mit

$$t(x) = f'(x_0)g'(x_0)(x-x_0)^2+r(x)[f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+s(x)]+s(x)[g(x_0)+g'(x_0)(x-x_0)]$$

mit

$$\frac{t(x)}{x - x_0} \xrightarrow{x \to x_0} 0\ .$$

□

3.2.6 Beispiel. • Für Polynome $p(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i\, x_i$ gilt:

$$p'(x) = \sum_{i=1}^{n} i a_i\, x^{i-1}. \tag{2.4}$$

• Wir haben folgenden Spezialfall von Satz 3.2.5 d)

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{-n}{x^{n+1}} \qquad n \in \mathbb{N},\ x \neq 0\,. \tag{2.5}$$

3.2.7 Satz. *Die Sinus- und die Cosinusfunktionen sind auf* $\mathbb{R}$ *differenzierbar, und es gilt:*

a) $(\sin\ x)' = \cos\ x$,

b) $(\cos\ x)' = -\sin\ x$,

c) $(\tan\ x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}\,,\ k \in \mathbb{Z},$

d) $(\cot\ x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}, \qquad x \neq k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}.$

Beweis. Wir behandeln $\sin x$. Das Additionstheorem des Sinus (Satz 2.3.2) besagt

$$\sin(x+h) = \sin(x)\cos h + \sin h \cos x\ .$$

Es folgt mit Beispiel 3.1.6

$$\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \sin x \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h} \xrightarrow{h\to 0} \sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1\ .$$

□

3.2.8 Bemerkung. Insbesondere sind Polynome, rationale Funktionen und die trigonometrischen Funktionen stetig im Definitionsbereich.

3.2.9 Satz. (Kettenregel) *Die Komposition $x \mapsto f(g(x))$ zweier differenzierbarer Funktionen ist differenzierbar und es gilt*

$$(f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x). \tag{2.6}$$

Beweis. Es gilt

$$\frac{f(g(x) - f(g(x_0))}{x - x_0} = \frac{f(g(x) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\ .$$

Nach Definition konvergiert der zweite Faktor gegen $g'(x_0)$. Sei $(x_n)_{n\geq 1}$ eine gegen x_0 konvergente Folge. Da g stetig ist, konvergiert $g(x_n)$ gegen $g(x_0)$ und daher

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(g(x) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} = f'(g(x_0))\ .$$

□

3.2.10 Höhere Ableitungen**.** *Die Ableitung der Ableitung von f bezeichnen wir, falls sie existiert, mit f'' oder $\frac{d^2}{dx^2} f(x)$. Allgemein definieren wir*

$$\begin{aligned} f^{(0)}(x) &:= f(x) \\ f^{(1)}(x) &:= f'(x) \\ f^{(n)}(x) &:= \frac{d}{dx}\ f^{(n-1)}(x) = \frac{d^n}{dx^n} f(x). \end{aligned}$$

Hierbei heißt $f^{(n)}(x)$ die n**-te Ableitung von** f *und f heißt* n**-mal differenzierbar** *wenn die n-te Ableitung existiert.*

• Mit Hilfe der Eulerschen Formel Kapitel 2 (3.14) und Satz 3.2.7 kann man zeigen, dass

$$\frac{d}{dt}\, e^{iwt} = iw\, e^{iwt}\,, \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{2.7}$$

3.2.11 Satz. *Sei $(f_n)_{n\geq 0}$ eine gleichmäßig konvergente Folge von stetigen Funktionen auf einem Intervall I. Dann ist die Grenzfunktion f stetig.*

Beweis. Sei $x \in I$, $(x_n)_{n\geq 0}$ eine Folge, die gegen x konvergiert. Zu zeigen ist

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)\ .$$

Sei $\varepsilon > 0$. Da die Funktionenfolge gleichmäßig konvergiert gibt es ein m_0, so dass

$$|f_m(y) - f(y)| < \varepsilon \qquad \text{für alle } y \in I, m \geq m_0.$$

Dies gilt insbesondere für $y = x$ und $y = x_n$, $n \geq 0$. Sei $m \geq m_0$ fest. Die Funktion f_m ist stetig, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} f_m(x_n) = f_m(x)\ .$$

Es gibt also n_0, so dass

$$|f_m(x_n) - f_m(x)| < \varepsilon \qquad \text{für alle } n \geq n_0\ .$$

Wir setzen zusammen für $n \geq n_0$:

$$|f(x_n) - f(x)| \leq |f(x_n) - f_m(x_n)| + |f_m(x_n) - f_m(x)| + |f_m(x) - f(x)| \leq 3\varepsilon\ .$$

□

3.2.12 Satz. *Sei $(f_n)_{n\geq 0}$ eine punktweise konvergente Folge von stetig differenzierbaren Funktionen auf einem Intervall I mit Grenzfunktion f. Konvergiert $(f_n')_{n\geq 0}$ auf I gleichmäßig, dann ist auch die Grenzfunktion f stetig differenzierbar und es gilt*

$$f'(x) = \Big(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\Big)' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

Die gleichmäßige Konvergenz der Ableitungen ist eine notwendige Voraussetzung.

3.2.13 Beispiel. Sei $f_n = \frac{1}{n}\sin nx$. Die Folge konvergiert gleichmäßig gegen 0. Die Folge der Ableitungen ist $f_n' = \cos nx$. Sie konvergiert nicht.

Wir wissen aus Satz 2.6.6, dass Potenzreihen auf abgeschlossenen Intervallen innerhalb des Konvergenzradius gleichmäßig konvergieren.

3.2.14 Satz. *Sei $\sum_{k=0}^\infty a_k x^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Dann konvergiert für alle $\varrho \in (0,R)$ die Reihe $\sum_{k=1}^\infty k a_k x^k$ absolut und gleichmäßig auf $|x| \le \varrho$ gegen die Ableitung*

$$\left(\sum_{k=0}^\infty a_k x^k\right)' = \sum_{k=1}^\infty k a_k x^{k-1} \ .$$

Beweis. Sei $f_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$. Die Reihe konvergiert nach Satz 2.6.6. Es gilt

$$f_n'(x) = \sum_{k=1}^n k a_k x^{k-1} \ .$$

Sei $g(x) = \sum_{k=0}^\infty k a_k x^k$. Wie im Beweis von Satz 2.6.6 kann g abgeschätzt werden gegen die konvergente Reihe

$$\sum_{k=1}^\infty ckq^k \quad q < 1 \ .$$

Die Potenzreihe g konvergiert, also konvergiert die Folge der f_n' gleichmäßig. Nun können wir Satz 3.2.12 anwenden. □

3.2.15 Satz. *Die Exponentialfunktion ist differenzierbar auf $\mathbb{R}$, und es gilt*

$$(\exp)' = \exp \ .$$

Beweis. Es gilt auf ganz $\mathbb{R}$:

$$\left(\sum_{k=0}^\infty \frac{x^k}{k!}\right)' = \sum_{k=1}^\infty k\frac{x^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^\infty \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \ .$$

□

Insbesondere ist auch die Exponentialfunktion stetig.

3.3 Anwendungen der Differentation

3.3.1 Maxima und Minima**.** *Man sagt, eine auf $D \subseteq \mathbb{R}$ erklärte Funktion f hat in $a \in D$ ein* **globales Maximum***, wenn $f(x) \le f(a)$ für alle $x \in D$ gilt. Die Zahl $b \in D$ heißt* **lokales Maximum von f,** *wenn es eine ε-Umgebung $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ von b gibt, so dass $f(x) \le f(b)$ für alle $x \in D \cap (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$. Analog definiert man* **globales Minimum***,* **lokales Minimum***. Jedes Minimum und jedes Maximum heißt* **Extremum***.*

3.3.2 Satz. *Ist f in einem offenen Intervall I differenzierbar, so gilt:*

$$x_0 \in I \text{ ist lokales Extremum } \Rightarrow f'(x_0) = 0.$$

Beweis. Sei x_0 ein lokales Maximum, also ein globales Maximum auf einem Intervall $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$, also $f(x_0+h)-f(x_0) \le 0$ für alle $h \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$. Wir betrachten den Differenzenquotienten in x_0:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \begin{cases} \le 0 & h > 0 \\ \ge 0 & h < 0 \end{cases} .$$

Der Grenzwert $h \to 0$ ist also größer gleich 0 für $h > 0$ und kleiner gleich 0 für $h < 0$. Insgesamt gilt

$$\Rightarrow f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = 0 .$$

□

- Aus Satz 3.3.2 folgt, dass

$$\begin{array}{ll} 1) & \text{Randpunkte von } D, \\ 2) & \text{Punkte, wo } f \text{ nicht differenzierbar ist, und} \\ 3) & \textbf{stationäre Punkte}, \text{ d.h. Punkte wo } f'(x) = 0 \text{ ist,} \end{array} \tag{3.1}$$

Kandidaten für Extrema sind.

3.3.3 Satz (Mittelwertsatz)**.** *Ist die Funktion f auf $[a, b]$ stetig und auf (a, b) differenzierbar, dann gibt es einen Punkt $x_0 \in (a, b)$ mit*

$$f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Beweis. Wir betrachten die Funktion

$$F(x) = f(x) - (x-b)\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \ .$$

Die Funktion ist in $[a,b]$ differenzierbar, also stetig. Sie hat nach dem Satz von Maximum und Minimum (Satz 3.1.11) ein Maximum und ein Minimum. Es gilt $F(a) = F(b) = f(b)$, daher liegt ein Extremum x_0 im Inneren. Nach Satz 3.3.2 gilt

$$F'(x_0) = 0 = f'(x_0) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \ .$$

□

3.3.4 Satz. *Für eine auf dem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ differenzierbare Funktion f gilt:*

a) $f'(x) > 0$ *auf* $I \quad \Rightarrow \quad f$ *ist auf* I *streng monoton wachsend,*

b) $f'(x) < 0$ *auf* $I \quad \Rightarrow \quad f$ *ist auf* I *streng monoton fallend,*

c) $f'(x) \geq 0$ *auf* $I \quad \Leftrightarrow \quad f$ *ist auf* I *monoton wachsend,*

d) $f'(x) \leq 0$ *auf* $I \quad \Leftrightarrow \quad f$ *ist auf* I *monoton fallend,*

e) $f'(x) = 0$ *auf* $I \quad \Leftrightarrow \quad f$ *ist konstant auf* I*.*

Beweis. Wir behandeln a). Seien $a < b$ Elemente von I. Nach dem Mittelwertsatz gibt es x_0 mit

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(x_0) > 0 \ .$$

Hieraus folgt $f(b) > f(a)$. □

3.3.5 Satz. *Eine auf (a,b) differenzierbare Funktion f hat im stationären Punkt $x_0 \in (a,b)$ ein lokales Maximum (bzw. lokales Minimum), wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass die Ableitung $f'(x)$ im Intervall $(x_0-\varepsilon, x_0)$ positiv und im Intervall $(x_0, x_0+\varepsilon)$ negativ ist (bzw. in $(x_0-\varepsilon, x_0)$ negativ und in $(x_0, x_0+\varepsilon)$ positiv).*

3.3.6 Satz. *Ist f auf (a,b) zweimal stetig differenzierbar und $x_0 \in (a,b)$ ein stationärer Punkt, dann gilt:*

a) $f''(x_0) < 0 \;\Rightarrow\; f$ *hat in* x_0 *ein lokales Maximum,*

b) $f''(x_0) > 0 \;\Rightarrow\; f$ *hat in* x_0 *ein lokales Minimum.*

Beweis. $f''(x_0) < 0$ bedeutet, dass $f'(x_0)$ streng monoton fällt. Daher ist $f'(x) > f(x_0)$ für $x < x_0$ und $f'(x) < f(x_0)$ für $x > x_0$. Mit dem letzten Satz folgt die Aussage. □

3.3.7 Definition. *Sei* $I \subseteq \mathbb{R}$ *ein Intervall. Eine Funktion* $f : I \to \mathbb{R}$ *heißt* **konvex***, wenn für alle* $x_1, x_2 \in I$ *und alle* $\lambda \in (0,1)$ *gilt:*

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)\, f(x_2).$$

Die Funktion heißt **konkav***, wenn* $-f$ *konvex ist.*

• Die Punkte $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ liegen auf der Verbindungsstrecke zwischen x_1 und x_2. Die Punkte $\lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x-2)$ liegen auf der Verbindungsstrecke zwischen $f(x_1)$ und $f(x_2)$. Die Funktion ist konvex, wenn die Funktionswerte auf dem Intervall unterhalb dieser Verbindungsstrecke liegen.

3.3.8 Satz. *Sei* f *auf einem Intervall* I *zweimal differenzierbar, dann gilt:*

a) $f'' \geq 0$ *auf* $I \;\Rightarrow\; f$ *ist konvex,*

b) $f'' \leq 0$ *auf* $I \;\Rightarrow\; f$ *ist konkav.*

3.3.9 Definition. *Sei* $f : D \to \mathbb{R}$ *eine Funktion. Der Punkt* $x_0 \in D$ *heißt* **Wendepunkt***, wenn es ein* $\varepsilon > 0$ *gibt, so dass* f *auf dem Intervall* $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ *konvex (bzw. konkav) ist und auf dem Intervall* $(x_0, -\varepsilon, x_0)$ *dem Intervall* $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ *konkav (bzw. konvex) ist.*

3.3.10 Satz. *Sei* $f : I \to \mathbb{R}$ *zweimal differenzierbar. Sei ferner* $x_0 \in I$ *ein Punkt, so dass* $f''(x_0) = 0$ *ist und die zweite Ableitung im Punkt* x_0 *ihr Vorzeichen wechselt. Dann ist* x_0 *ein Wendepunkt.*

Beweis. Satz 3.3.5 anwenden auf f'. □

3.3.11 Kurvendiskussion**.** *Um eine Vorstellung von der Gestalt des Graphen* $y = f(x)$ *zu bekommen führt man eine Kurvendiskussion durch, d.h.*

1) Maximalen Definitions- und Wertebereich bestimmen,

2) Symmetrie, Periodizität testen,

3) *Stetigkeit und Differenzierbarkeit prüfen,*

4) *Nullstellen und Vorzeichen bestimmen,*

5) *Extremwerte ermitteln,*

6) *Monotoniebereiche ermitteln,*

7) *Wendepunkte suchen,*

8) *Konvexität, Konkavität untersuchen,*

9) *Asymptoten, Grenzwerte bestimmen, $|x| \to \infty, x \to$ „kritische Stellen”,*

10) *Skizze.*

3.3.12 Satz Verallgemeinerter Mittelwertsatz**.** *Sind f, g in $[a, b]$ stetig und in (a, b) differenzierbar und ist $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$, dann gibt es einen Punkt $x_0 \in (a, b)$, mit*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Beweis. Wegen $g'(x) \neq 0$ auf (a, b) gilt nach dem Mittelwertsatz $g(b) \neq g(a)$. Damit ist die Funktion

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g(x)$$

wohldefiniert auf $[a, b]$ und differenzierbar. Wir wenden den Mittelwertsatz auf F an. Es gilt $F(a) = F(b)$, also gibt es ein $x_0 \in (a, b)$ mit $F'(x_0) = 0$. Dies ist der gesuchte Punkt. □

3.3.13 Satz (de l'Hospital)**.** *Sind f, g auf (a, b) differenzierbare Funktionen, $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$, mit den Eigenschaften*

a) *$f(x) \to 0, g(x) \to 0$ oder $f(x) \to \infty, g(x) \to \infty$ für $x \to b^-$.*

b) *$\lim\limits_{x \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, dann gilt:*

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Entsprechendes gilt für $x \to a^-$ und $x \to \pm\infty$.

Beweis. Wir behandeln $f(x) \to 0$, $g(x) \to 0$. Beide Funktionen setzen sich durch 0 zu einer stetigen Funktion auf $(a,b]$ fort. Nach dem verallgemeinerten Mittelwertsatz gibt es zu jedem $a' \in (a,b)$ ein x_0 mit

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b)-f(a')}{g(b)-g(a')} = \frac{f(a')}{g(a')} \ .$$

Mit $a' \to b^-$ gilt auch $x_0 \to b^-$, also

$$\lim_{a' \to b^-} \frac{f(a')}{g(a')} = \lim_{x_0 \to b^-} \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \ ,$$

wobei der rechte Grenzwert existiert, da der linke existiert. □

3.3.14 Beispiel.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = \cos(0) = 1$$

Man beachte, dass wir diese Regel benutzt haben, um die Differenzierbarkeit von $\sin x$ herzuleiten. A posteriori, lässt sie sich leicht wieder bestätigen.

Wir wollen nun zwei Verfahren zum Bestimmen von Nullstellen vorstellen. Jedoch kann man nur selten eine explizite Lösung angeben. Deshalb bestimmt man Folgen von Näherungslösungen der Gleichung $f(x) = 0$, d.h. man konstruiert eine Folge $(x_n)_{n \geq 0}$, so dass $f(x_n) \to 0$.

3.3.15 Definition. *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Dann heißt $x \in [a,b]$* **Fixpunkt** *von f, wenn $f(x) = x$.*

Das Finden von Nullstellen von f ist äquivalent zum Finden von Fixpunkten von $g(x) = f(x) + x$.

3.3.16 Satz Banachscher Fixpunktsatz**.** *Hat eine auf $[a,b]$ stetig differenzierbare Funktion f folgende Eigenschaften*

a) $a \leq f(x) \leq b$ für alle $x \in [a,b]$,

b) es gibt eine Konstante K mit $|f'(x)| \leq K < 1$ für alle $x \in [a,b]$,

dann gilt:

1) Es gibt genau ein $x^* \in [a,b]$ mit $f(x^*) = x^*$.

2) Die Iterationsfolge

$$x_{n+1} = f(x_n), \qquad n \in \mathbb{N}_0 \tag{3.2}$$

mit beliebigen Startwert $x_0 \in [a, b]$ konvergiert gegen den Fixpunkt x^*.

3) Es gilt die Abschätzung:

$$|x_n - x^*| \leq \tfrac{K}{1-K} |x_n - x_{n-1}| \qquad \textit{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Die Bedeutung von 3) ist es, dass die Genauigkeit der Approximation kontrolliert werden kann, ohne den Fixpunkt exakt zu kennen.

Beweis. Die Existenz des Fixpunktes wird vom Zwischenwertsatz für die Funktion $f(x) - x$ garantiert. Angenommen, $x_1 < x_2$ sind zwei Fixpunkte. Dann gibt es nach dem Mittelwertsatz für $f(x)$ ein $x_0 \in (x_1, x_2)$ mit

$$f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x-1)}{x_2 - x_1} = \frac{x_2 - x_1}{x_2 - x_2} = 1 \ .$$

Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung $f'(x) < 1$ auf $[a, b]$.
Sei ab jetzt x^* der eindeutige Fixpunkt. Sei $x_0 \in [a, b]$ beliebig und $(x_n)_{n \geq 0}$ wie im Satz. Es gilt

$$x_n - x^* = f(x_{n-1}) - f(x^*) \ .$$

Nach dem Mittelwertsatz gibt es y zwischen x_{n-1} und x^* mit

$$f'(y) = \frac{f(x_{n-1}) - f(x^*)}{x_{n-1} - x^*} \ .$$

Zusammen:

$$|x_n - x^*| = |f(x_{n-1}) - f(x^*)| = |f'(y)| \, |x_{n-1} - x^*| \leq K|x_{n-1} - x_n| \ .$$

Hieraus folgt induktiv

$$|x_n - x^*| \leq K^n |x_0 - x^*| \Rightarrow \lim_{n \to \infty} x_n = x^*$$

da $|K| < 1$.
Aus der Abschätzung folgt auch

$$|x_n - x^*| \leq K|x_{n-1} - x_n + x_n - x^*| = K|x_{n-1} - x_n| + K|x_n - x^*|$$

und damit 3). □

3.3.17 Newton Verfahren. *Man sucht die Nullstellen $f(x) = 0$ einer gegebenen Funktion mit Hilfe einer Fixpunktiteration für die Hilfsfunktion*

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)},$$

unter der Voraussetzung $f'(x) \neq 0$ auf $[a, b]$. Wir erhalten die Iterationsfolge

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad x_0 \in [a, b]. \tag{3.3}$$

3.3.18 Satz. *Sei $x^* \in [a, b]$ eine Nullstelle der zweimal stetig differenzierbaren Funktion f. Falls $f'(x^*) \neq 0$ ist, gibt es ein kleines Intervall I, welches x^* enthält, so dass die in (3.3) definierte Iterationsfolge x_n für Startwerte x_0 aus diesem Intervall I gegen x^* konvergiert. Weiterhin gilt*

$$|x_{n+1} - x^*| \leq M \, |x_n - x^*|^2,$$

wobei $M = \frac{\max\{|f''(x)|; x \in I\}}{\min\{|f'(x)|; x \in I\}}$.

Beweis. Die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes sind für f/f' in einem kleinen Intervall erfüllt. (Rest überspringen) □

3.4 Umkehrfunktionen

Wir erinnern uns, dass eine Funktion $f : A \to B$ bijektiv heißt, wenn es zu jedem $b \in B$ genau ein $a \in A$ gibt mit $f(a) = b$. In dieser Situation existiert die Umkehrfunktion $f^{-1} : B \to A$, die jedem b genau das a mit $f(a) = b$ zuordnet. Es gilt also

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{id}, f^{-1} \circ f = \mathrm{id} \ .$$

3.4.1 Definition. *Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt* **umkehrbar** *auf $D \subset I$, wenn*

$$f|_D : D \to f(D)$$

bijektiv ist.

• Ist f über D umkehrbar mit der Umkehrfunktion $f^{-1} : f(D) \to \mathbb{R}$, dann liegen die Graphen $y = f(x)$ und $y = f^{-1}(x)$ symmetrisch zur Geraden $y = x$.

3.4.2 Satz. *a) Jede strikt monotone Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist umkehrbar.*

b) Jede auf einem Intervall stetige strikt monotone Funktion f ist umkehrbar auf diesem Intervall. Die Umkehrfunktion ist ebenfalls stetig.

c) Jede über einem Intervall I stetig differenzierbare Funktion mit $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in I$ ist über I umkehrbar.

d) Die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(D) \to \mathbb{R}$ einer über einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ umkehrbaren und differenzierbaren Funktion f ist in allen Punkten $x \in f(I)$ mit $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$ differenzierbar und es gilt

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}. \tag{4.1}$$

Beweis. Seien $x < x'$ in D. Dann gilt $f(x) < f(x')$ (bzw. $f(x) > f(x)$), also insbesondere $f(x) \neq f(x')$. Die Funktion ist also injektiv. Ist zusätzlich f stetig und auf einem Intervall definiert, so ist nach Zwischenwertsatz und dem Satz von Maximum und Minimum der Wertebereich ebenfalls ein Intervall.
(Stetigkeit übergehen)
Ist f stetig differenzierbar und $f'(x) \neq 0$ auf ganz D, so ist (Zwischenwertsatz für f') $f'(x) < 0$ auf ganz D oder $f'(x) > 0$ auf ganz D. Hieraus folgt nach Satz 3.3.4 die strenge Monotonie.
Um die Differenzierbarkeit von $\varphi = f^{-1}$ zu zeigen, betrachten wir eine konvergente Folge $y_n \to y$ in $f(D)$. Sei $x_n = \varphi(y_n)$ und $x = \varphi(y)$. Wegen der Stetigkeit von φ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Es folgt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(y_n) - \varphi(y)}{y_n - y} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x}{f(x_n) - f(x)} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)-f(x)}{x_n - x}} = \frac{1}{f'(x)} .$$

□

3.4.3 n-te Wurzel. *Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Funktion*

$$f(x) = x^n, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

1) Falls n gerade ist, d.h. $n = 2k$, ist f nicht auf $\mathbb{R}$ umkehrbar, da $x^n = (-x)^n$. Aber für $x \in \mathbb{R}_0^+$ gilt $f'(x) > 0$ und somit ist x^{2k} auf $\mathbb{R}_0^+$ umkehrbar. Die Umkehrfunktion heißt n**-te Wurzel**, in Zeichen $\sqrt[n]{\cdot} : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$, d.h. $x = \sqrt[n]{y}$ genau dann wenn $x^n = y$.

2) Falls n ungerade ist, d.h. $n = 2k+1$, ist f auf ganz $\mathbb{R}$ strikt monoton wachsend, denn $f'(x) = (2k+1)\,x^{2k} > 0$, für $x \neq 0$. Damit ist die **n-te Wurzel** auf ganz $\mathbb{R}$ definiert. Zusammenfassend haben wir:

$$y = \sqrt[n]{x} \quad \Leftrightarrow \quad y^n = x \begin{cases} \text{für } x \geq 0, & n \in \mathbb{N} \text{ gerade}, \\ \text{für } x \in \mathbb{R}, & n \in \mathbb{N} \text{ ungerade}. \end{cases} \tag{4.2}$$

Falls $x \in \mathbb{R}_0^+$ und $\alpha = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$\begin{aligned} x^{\frac{1}{n}} &:= \sqrt[n]{x}, \\ x^{\frac{m}{n}} &:= \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Aus der Definition ergeben sich sofort die Rechenregeln

$$\begin{aligned} x^\alpha x^\beta &= x^{\alpha+\beta}, \\ (x^\alpha)^\beta &= x^{\alpha\beta}, \\ x^\alpha y^\alpha &= (xy)^\alpha \end{aligned} \tag{4.4}$$

und die Formel für die Ableitung

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \qquad x > 0. \tag{4.5}$$

3.4.4 Arcusfunktionen**.** *Wir betrachten jetzt die Umkehrfunktionen der Kreisfunktionen* $\sin x, \cos x, \tan x, \cot x$. *Dazu müssen wir geeignete Intervalle finden, auf denen diese Funktionen strikt monoton sind.*

- *Die Sinusfunktion ist auf* $[-\pi/2,\, \pi/2]$ *strikt monoton wachsend, denn* $\sin'(x) = \cos x > 0$ *falls* $x \in (-\pi/2,\, \pi/2)$. *Die Umkehrfunktion heißt* **Arcussinus***, in Zeichen* arcsin*, und ist definiert durch*

$$\begin{gathered} \arcsin : [-1,1] \to [-\pi/2,\, \pi/2] \\ y = \arcsin\, x \quad \Leftrightarrow \quad (\sin y = x) \quad \wedge \quad (y \in [-\pi/2,\, \pi/2]). \end{gathered} \tag{4.6}$$

Für die Ableitung gilt:

$$(\arcsin x)' = \tfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \textit{für } -1 < x < 1. \tag{4.7}$$

Beweis. Aus der allgemeinen Formel folgt zunächst

$$\frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}\ .$$

Wegen $\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y}$ folgt

$$\frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\arcsin x}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ .$$

□

- *Die Cosinusfunktion ist auf* $[0,\pi]$ *strikt monoton fallend. Die Umkehrfunktion heißt* **Arcuscosinus**, *in Zeichen* arccos, *und ist definiert durch:*

$$\begin{aligned} &\arccos : [-1,1] \to [0,\pi] \\ y = \arccos\ x \quad &\Leftrightarrow \quad (\cos y = x)\ \wedge (y \in [0,\pi]). \end{aligned} \tag{4.8}$$

Es gilt

$$(\arccos x)' = \tfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \textit{für } -1 < x < 1 \tag{4.9}$$

- Die Tangens- bzw. Cotangensfunktion ist auf dem Intervall $(-\pi/2,\ \pi/2)$ bzw. $(0,\pi)$ strikt monoton. Die Umkehrfunktion heißt **Arcustangens** bzw. **Arcuscotangens** und ist definiert als

$$\begin{aligned} \arctan :\ &\mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2) \\ \arctan x = y \quad &\Leftrightarrow \quad (\tan y = x) \quad \wedge \quad \big(y \in (-\pi/2,\ \pi/2)\big) \end{aligned} \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{arccot} :\ &\mathbb{R} \to (0,\pi) \\ \operatorname{arccot} x = y \quad &\Leftrightarrow \quad \cot y = x \quad \wedge \quad y \in (0,\pi) \end{aligned} \tag{4.11}$$

Für die Ableitungen ergibt sich für $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} (\arctan x)' &= \tfrac{1}{1+x^2}, \\ (\operatorname{arccot} x)' &= \tfrac{-1}{1+x^2} \end{aligned} \tag{4.12}$$

3.5 Exponential- und Logarithmusfunktion

3.5.1 Satz. *Die Exponentialfunktion hat folgende Eigenschaften:*

a) $\exp(0) = 1, \ \exp x > 0$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$.

b) Für alle $x \in \mathbb{R}$ *gilt:*

$$\tfrac{d}{dx}\exp(x) = \exp(x). \tag{5.1}$$

Somit ist insbesondere e^x *stetig differenzierbar.*

c) Es gelten:

$$\begin{array}{rcl} \exp(x+y) = & \exp(x)\exp(y), & \forall x, y \in \mathbb{R}, \\ \exp(-x) = & \frac{1}{\exp x}, & \forall x \in \mathbb{R}. \end{array} \tag{5.2}$$

d) Die e-Funktion ist strikt monoton wachsend und konvex.

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \exp x = \infty, \qquad \lim\limits_{x\to-\infty} \exp x = 0$

f) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\exp x}{x^n} = \infty, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$

Beweis. Die Aussagen b) und c) kennen wir schon, vergleiche Satz 2.6.9, Satz 3.2.15. Für $x \geq 0$ ist die Exponentialfunktion nach Definition positiv. Wegen 5.2 folgt dies auch für negative x.
d) folgt aus den Eigenschaften von $\exp'$.
Wegen der strengen Monotonie gilt

$$\lim_{x\to\infty} \exp x = \lim_{n\to\infty} \exp n = \lim_{n\to\infty} e^n \ .$$

Wegen $e > 1$ divergiert diese Folge gegen ∞.
Formel f) folgt induktiv mit der Regel von de l'Hospital (Satz 3.3.13):

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\exp(x)}{x^n} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{d}{dx}\exp(x)}{\frac{d}{dx}x^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\exp(x)}{nx^{n-1}} \ .$$

□

Als streng monotone Funktion hat $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ eine Umkehrfunktion.

3.5.2 Der natürliche Logarithmus**.** *Die Exponentialfunktion wächst strikt monoton, also existiert nach Satz 3.4.2 auf* $(0,\infty)$ *eine Umkehrfunktion. Diese heißt der* **natürliche Logarithmus** *und ist definiert durch:*

$$\begin{gathered} \ln : (0,\infty) \to \mathbb{R} \\ y = \ln x \qquad \Leftrightarrow \qquad \exp(y) = x. \end{gathered} \tag{5.3}$$

Insbesondere gilt:

$$\begin{aligned} \ln(\exp x) &= x, \qquad & x \in \mathbb{R}, \\ \exp(\ln x) &= x, \qquad & x > 0. \end{aligned} \tag{5.4}$$

$$\begin{aligned} \ln\ e &= 1, \\ \ln\ 1 &= 0, \end{aligned} \tag{5.5}$$

$$\begin{aligned} x \in (0,1) \quad &\Rightarrow \quad \ln\ x < 0, \\ x \in (1,\infty) \quad &\Rightarrow \quad \ln\ x > 0, \end{aligned} \tag{5.6}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} \ln\ x &= -\infty, \\ \lim_{x\to\infty} \ln\ x &= \infty. \end{aligned} \tag{5.7}$$

In der Mathematik schreibt man meist log und meint den natürlichen Logarithmus ln.

3.5.3 Satz. *Der natürliche Logarithmus ist strikt konkav und differenzierbar. Es gilt*

$$\tfrac{d}{dx} \ln\ x = \tfrac{1}{x}, \tag{5.8}$$

$$\begin{aligned} \ln(xy) &= \ln\ x + \ln y, \\ \ln \tfrac{x}{y} &= \ln\ x - \ln y, \end{aligned} \tag{5.9}$$

wobei $x, y > 0$.

• *Der natürliche Logarithmus wächst langsamer als jede* n*-te Wurzel, d.h. für alle* $n \in \mathbb{N}$ *gilt:*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln\ x}{\sqrt[n]{x}} = 0. \tag{5.10}$$

Beweis. Die Formel für die Ableitung folgt aus Satz 5.2:

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{\frac{d}{dx}\exp(\ln(x))} = \frac{1}{\exp\ln x} = \frac{1}{x} \ .$$

Hieraus und den Eigenschaften der Exponentialfunktion folgen alle anderen Aussagen. □

3.5.4 Allgemeine Exponentialfunktionen und Logarithmen**.**
Sei $a > 0$. Für $r \in \mathbb{Q}$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$(\exp(x))^r = \exp(rx) \ .$$

Die Wahl $x = \ln a$ liefert also

$$a^r = e^{r \ln a}.$$

Auf Grund der Stetigkeit der Exponentialunktion definiert man daher

$$a^x := \exp(x \ln a) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}, a > 0 \tag{5.11}$$

Man nennt $x \mapsto a^x$ die **Exponentialfunktion zur Basis** a**.**

3.5.5 Satz. *Für die Exponentialfunktion zur Basis a, mit $a > 0$, gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $b > 0$*

$$\begin{aligned} a^x\, a^y &= a^{x+y}, \\ (ab)^x &= a^x\, b^x, \end{aligned} \tag{5.12}$$

$$\begin{aligned} (a^x)^y &= a^{xy}, \\ \ln(a^x) &= x \ln a, \end{aligned} \tag{5.13}$$

$$\frac{d}{dx}\, a^x = a^x \ln a. \tag{5.14}$$

- Nun können wir auch **Potenzen** von x für beliebige $\alpha \in \mathbb{R}$ definieren. Aus (4.19) folgt für $x > 0$ und $\alpha \in \mathbb{R}$

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}. \tag{5.15}$$

  Man berechnet sofort

$$(x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x}\frac{\alpha}{x} = \alpha\, x^{\alpha-1}. \tag{5.16}$$

- Für alle $a > 0, a \neq 1$, ist die Funktion a^x umkehrbar, denn die Gleichung $y = e^{x \ln a}$ hat für $y > 0$ die eindeutige Lösung $x = \frac{\ln y}{\ln a}$. Die Umkehrfunktion heißt **Logarithmus zur Basis** a und ist definiert durch:
$$\begin{aligned} \ln_a &: (0,\infty) \to \mathbb{R} \\ y = \ln_a(x) \quad &\Leftrightarrow \quad a^y = x. \end{aligned} \tag{5.17}$$
Es gelten :
$$\begin{aligned} \ln_a(xy) &= \ln_a(x) + \ln_a(y), \\ \tfrac{d}{dx} \ln_a(x) &= \tfrac{1}{x \ln a}. \end{aligned} \tag{5.18}$$

3.5.6 Definition. *Die Hyperbelfunktionen* **sinushyperbolicus, cosinushyperbolicus** *und* **tangenshyperbolicus** *sind für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert durch*

$$\begin{aligned} \sinh(x) &:= \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \\ \cosh(x) &:= \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \\ \tanh(x) &:= \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}. \end{aligned}$$

- Aus der Definition 3.5.6 und den Eigenschaften der e-Funktion erhält man folgende Rechenregeln:
$$\begin{aligned} \sinh(-x) &= -\sinh(x) \\ \cosh(-x) &= \cosh(x) \end{aligned} \tag{5.19}$$
$$\begin{aligned} \sinh(x+y) &= \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y), \\ \cosh(x+y) &= \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y), \end{aligned} \tag{5.20}$$
$$(\cosh(x))^2 - (\sinh(x))^2 = 1. \tag{5.21}$$
Für die Ableitungen gilt:
$$\begin{aligned} \sinh(x)' &= \cosh(x), \\ \cosh(x)' &= \sinh(x), \\ \tanh(x)' &= \frac{1}{\cosh^2(x)}. \end{aligned} \tag{5.22}$$

- Die Funktion $\sinh(x)$ ist auf $\mathbb{R}$ strikt monoton wachsend, also existiert eine Umkehrfunktion. Diese heißt **areasinushyperbolicus** und wird mit $\operatorname{arsinh}(x)$ bezeichnet. Die Funktion $\cosh(x)$ ist auf $\mathbb{R}_0^+$ strikt monoton wachsend. Die Umkehrfunktion heißt **areacosinushyperbolicus** und wird mit $\operatorname{arcosh}(x)$ bezeichnet. Es gilt:

$$\begin{aligned} \operatorname{arsinh}(x) &= \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right), \quad x \in \mathbb{R}, \\ \operatorname{arcosh}(x) &= \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right), \quad x \geq 1. \end{aligned} \tag{5.23}$$

- Die Kettenregel und (4.33) liefern:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\operatorname{arsinh}(x) &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x \in \mathbb{R}, \\ \frac{d}{dx}\operatorname{arcosh}(x) &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad x > 1. \end{aligned} \tag{5.24}$$

3.6 Beispiele

3.6.1 Beispiel. Eine Lampe wird im Punkt $B = (0, h)$ befestigt. Ihre Leuchtstärke im Punkt $A = (a, 0)$ ist gegeben durch

$$y(h) = h(a^2+h^2)^{-3/2} \ .$$

Wir wollen maximale Helligkeit in A erreichen.
Es gilt $y(0) = 0$,

$$\lim_{h\to\infty} \frac{h}{(a^2+h^2)^{3/2}} = \lim_{h\to\infty} \frac{1}{3/2(a^2+h^2)^{1/2}2h} = 0 \ .$$

Wegen $h(1) \neq 0$ hat die Funktion wenigstens eine Maximalstelle in $(0, \infty)$. Wir bestimmen die stationären Punkte:

$$\frac{d}{dh}y = (a^2+h^2)^{-3/2} + h(-3/2)(a^2+h^2)^{-5/2}2h = \frac{a^2+h^2-3h^2}{(a^2+h^2)^{5/2}}$$

hat als einzige Nullstelle in $h > 0$

$$h = \frac{a}{\sqrt{2}} \ .$$

Dies ist demnach das eindeutige Maximum.

3.6.2 Beispiel. (Thermodynamik) Die Molwärme (Ableitung der enthaltenen Energiemenge nach der Temperaturänderung je Mol) eines zweiatomigen Gases ist bei festem Volumen als Funktion der absoluten Temperatur T gegeben durch

$$c(T) = R\,\frac{(T_0/T)^2 \mathrm{e}^{T_0/T}}{(\mathrm{e}^{T_0/T}-1)^2}$$

mit der Gaskonstanten R und der charakteristischen Temperatur T_0. Wir betrachten die Grenzwerte $T \to 0$ und $T \to \infty$. Zur Vereinfachung setzen wir $x = T_0/T$. Mit der Regel von Hospital:

$$\begin{aligned}
\lim_{T\to 0^+} c(T) &= \lim_{x\to\infty} R\frac{x^2\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x-1)^2} \\
&= \lim_{x\to\infty} R\frac{(2x+x^2)\mathrm{e}^x}{2(\mathrm{e}^x-1)\mathrm{e}^x} \\
&= \lim_{x\to\infty} R\frac{2+2x}{2\mathrm{e}^x} \\
&= \lim_{x\to\infty} R\frac{2}{2\mathrm{e}^x} = 0 \\
\lim_{T\to\infty} c(T) &= \lim_{x\to 0^+} R\frac{x^2\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x-1)^2} \\
&= \lim_{x\to\infty} R\frac{(2x+x^2)}{2(\mathrm{e}^x-1)} \\
&= \lim_{x\to\infty} R\frac{1+x}{\mathrm{e}^x} = R
\end{aligned}$$

3.6.3 Beispiel. Wir wollen

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$$

herleiten. Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \exp\left(x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) \ .$$

Wir wollen gerne

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{x\to\infty} f(x)$$

ausnutzen. Dies gilt, wenn der rechte Grenzwert existiert. Wegen der Stetigkeit der Exponentialfunktion genügt es,

$$\lim_{x\to\infty} x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

zu berechnen. Der erste Faktor streben gegen ∞, der zweite gegen 0. Wir wende die Regel von Hospital an:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^{-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\frac{-1}{x^2}}{-x^{-2}} = 1 \ .$$

Es folgt

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \exp(1) = \mathrm{e} \ .$$

3.6.4 Beispiel Fixpunktiteration**.** Gesucht wird eine Lösung von

$$x = \exp(x^2 - 2) \ .$$

Sei $f(x)$ die rechte Seite. Es gilt

$$f'(x) = 2x\exp(x^2-2) \ .$$

Daher hat f ein Minimum in x und wächst streng monoton für $x > 0$. Es gilt

$$f''(x) = (2+4x^2)\exp(x^2-2) \ .$$

Die zweite Ableitung ist überall größer 0, daher wächst die Ableitung wächst streng monoton auf ganz $\mathbb{R}$. Wir suchen ein Intervall, in dem $|f'(x)| < 1$. Da die Gleichung nicht explizit lösbar ist, experimentieren wir:

x	$f'(x)$
0	0
1	$2\mathrm{e}^{-1}$
2	$4\mathrm{e}^{2}$

Innerhalb $[-1,1]$ ist also $|f'(x)| < 1$. Es gilt $f(1) = f(-1) = \mathrm{e}^{-1} < 1$. In diesem Intervall sind also die Voraussetzung des Fixpunktsatzes erfüllt mit

$$K = f'(1) = \mathrm{e}^{-1} \Rightarrow \frac{K}{1-K} = \frac{1}{\mathrm{e}-1} < 0{,}6 \ .$$

In diesem Intervall hat die Funktion also einen eindeutigten Fixpunkt. Wir arbeiten mit dem Startwert 0:

n	x_n	$x_n - x_{n-1}$
0	0	
1	$\mathrm{e}^{-2} = 0,1353$	$0,1353$
2	$\mathrm{e}^{-1,9817} = 0,1378$	$0,002$
3	$\mathrm{e}^{-1,9810} = 0,1379$	$0,0001$

Damit sind die ersten drei Dezimalstellen bestimmt, die vierte mit Genauigkeit kleiner $0,6$, also liegt der genaue Fixpunkt in $[0,1378, 0,1380]$.

3.6.5 Bemerkung Geometrische Interpretation des Newton-Verfahrens**.** Die Iterationsvorschrift lautet:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \ .$$

Dies hat eine geometrische Interpretation: Die Kurventangente

$$y = f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n)$$

schneidet die x-Achse in x_{n+1}. Im günstigsten Fall liegt x_{n+1} näher an der Nullstelle als x_n.

3.6.6 Beispiel. Wir wollen mit dem Newton-Verfahren die Zahl $\sqrt{5}$ bestimmen. Es ist eine Nullstelle von $x^2 - 5$. Die Ableitung $2x$ ist positiv für $x > 0$. Es gibt also ein kleines Intervall um $\sqrt{5}$, in dem das Verfahren funktioniert. Die Iterationsvorschrift lautet

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 5}{2x_n} = \frac{x_n^2 + 5}{2x_n} \ .$$

Wir beginnen mit $x = 1$.

n	x_n
0	1
1	$\frac{6}{2} = 3$
2	$\frac{14}{6} = 2,333$
3	$\frac{49/9+45/9}{14/3} = \frac{47}{21} = 2,2381$

Die Folge scheint zu konvergieren.

Alternativ: Wir suchen eine Nullstelle von $1 - \frac{5}{x^2}$. Die Ableitung $10/x^3$ ist positiv für $x > 0$. Die Iterationsvorschrift lautet

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{1 - \frac{5}{x_n^2}}{\frac{10}{x_n^3}} \\ &= x_n - \frac{x_n^2 - 5}{x_n^2} \frac{x_n^3}{10} \\ &= x_n \frac{15 - x_n^2}{10} \end{aligned}$$

Wir probieren den Startwert 3:

n	x_n
0	3
1	$\frac{18}{10} = \frac{9}{5} = 1,8$
2	$2,1$
3	$2,22$
4	$2,23601$

Diese Folge konvergiert anscheinend.
Tatsächlich ist eine hinreichende Bedingung:

1. f hat in $[a,b]$ eine Nullstelle x^*
2. $f'(x)$ hat in $[a,b]$ keine Nullstelle
3. f ist konvex oder konkav
4. Die Iterationswerte x_1 zu $x_0 = a, b$ liegen im Intervall.

Dann konvergiert für jeden Startwert in $[a,b]$ die Rekursionsfolge gegen x^* und

$$|x^* - x_k| \leq \frac{M}{2}|x_k - x_{k-1}|^2$$

mit M wie in 3.3.17.
Für die Funktion $x^2 - 5$ können wir $a = 1$, $b = 3$ wählen. Es gilt

$$f(1) = -4 < 0, f(3) = 4 > 0 \ .$$

x_1 für 1 und 3haben wir oben berechnet, und sie liegen im Intervall. Wegen $f'' = 2$ ist die Funktion konvex. Die Folge konvergiert.

Für die Funktion $1 - \frac{5}{x^2}$ können wir $a = 1$, $b = 3$ wählen. Es gilt

$$f(1) = 1 - 5 = -4 < 0,\ f(3) = 1 - \frac{5}{9} > 0 \ .$$

x_1 für 3 haben wir oben berechnet. Für den Startwert 1 erhalten wir

$$x_1 = \frac{15 - 1}{10} = \frac{14}{10} \in [1, 3] \ .$$

f' ist positiv und $f''(x) = -30x^{-4}$ ist negativ. Die Folge konvergiert tatsächlich.

3.6.7 Beispiel Radioaktiver Zerfall**.** Experimentell findet man heraus, dass die Anzahl der radioaktiven Zerfälle unter $N(t)$ Teilchen in einem kleinen Intervall Δt proportional ist zu $N(t)$, d.h. die Zerfallsrate ist konstant. Unter der Annahme, dass $N(t)$ differenzierbar ist ergibt sich

$$\dot{N}(t) = -kN(t) \ .$$

Dies führt also auf die Funktion

$$N(t) = N(0)\exp(-kt) \ .$$

Die **Halbwertszeit** T ist definiert als die Zeit, in der die Hälfte des Materials zerfallen ist, also $N(T) = N(0)/2$. Wir lösen die Gleichung

$$\frac{1}{2} = \exp(-kT) \Leftrightarrow 2 = \exp(kT) \Leftrightarrow \ln 2 = kT \ .$$

Es gilt also

$$T = \frac{1}{k}\ln 2 \ .$$

3.6.8 Beispiel Höhenformel**.** Der Zusammenhang wzischen Druck p und Höhe h in einem gasgefüllten Behälter wird durch

$$p = p_0 \left(1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma}\frac{\rho_0}{p_0} gh\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

beschrieben. Dabei hängt γ vom verwendeten Gas. Wir betrachten die Annäherung an ein ideals Gas $\gamma \to 1$. Sei $x = \frac{\gamma}{\gamma-1}$. Es ist $\lim\limits_{\gamma\to 1} x \to \infty$. Sei außerdem zur Vereinfachung $a = -\frac{\rho_0}{p_0}gh$. Wir berechnen

$$\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\exp(x\ln(1 + a/x)) \ .$$

Wie in Beispiel 3.6.3 finden wir

$$\lim_{x\to\infty} x \ln\left(1+\frac{a}{x}\right) = a$$

und daher wegen Stetigkeit von exp

$$\lim_{\gamma\to 1} p = p_0 \exp\left(-\frac{\rho_0}{p_0} gh\right) \ .$$

Kapitel 4

Integration

Die Integration ist die Umkehroperation zur Differentation. Es wird also das Problem behandelt, wie man aus der Kenntnis der Ableitung einer Funktion die Funktion selbst wiederherstellt. Eine entscheidende Rolle bei der Lösung dieser Aufgabe spielt der Mittelwertsatz. Es wird sich zeigen, dass das Integral das geeignete Mittel zur Berechnung von Flächen- und Rauminhalten ist.

4.1 Das bestimmte Integral

• **Motivation:** Sei $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ eine Zerlegung von $[a, b]$, dann existieren nach dem Mittelwertsatz (Kapitel 3 Satz 3.3.3) $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ mit

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Demzufolge gilt:

$$f(b) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}). \qquad (*)$$

Wenn die Zerlegung fein genug ist, kann man ξ_i durch einen beliebigen Punkt in Intervall $[x_{i-1}, x_i]$ ersetzen und erhält eine gute Approximation von $f(b) - f(a)$, d.h. die rechte Seite von (*) ist eine gute Approximation des Integrals von $f'(x)$.

4.1.1 Definition. *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Sei durch*

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

eine **Zerlegung** *von $[a, b]$ in n Teilintervalle $[x_{i-1}, x_i]$ gegeben und seien $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ beliebige Zwischenpunkte. Dann heißt*

$$Z_n := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \tag{1.1}$$

die **Riemannsche Summe von** f. *Die Funktion f heißt* **(Riemann) integrierbar**, *wenn der der Grenzwert der Folge $(Z_n)_{n\geq 1}$ existiert, sofern die maximale Länge der Teilintervalle $[x_{i-1}, x_i]$ mit $n \to \infty$ gegen Null strebt und der Grenzwert unabhängig von der gewählten Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ und der Zwischenpunkte ξ_i ist.*
Der Grenzwert der Folge $(Z_n)_{n\geq 1}$ heißt das **bestimmte Integral von f über** $[a, b]$ *und wird mit $\int_a^b f(x)\,dx$ bezeichnet, d.h.*

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}). \tag{1.2}$$

• Um Fallunterscheidungen zu vermeiden setzen wir

$$\begin{aligned} &\int_a^a f(x)\,dx := 0, \\ &\int_b^a f(x)\,dx := -\int_a^b f(x)\,dx, \qquad b > a. \end{aligned} \tag{1.3}$$

4.1.2 Geometrische Interpretation. *Die Riemannsche Summe eine positiven Funktion f ist eine Summe von Rechteckflächen, die die Fläche I unter dem Graph von f immer genauer approximiert. Also gilt*

$$I = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Genau genommen wird erst durch das Integral der Flächeninhalt definiert.

4.1.3 Definition. *Sei f eine auf dem Intervall $[a, b]$ definierte, beschränkte Funktion, die an höchstens endlich vielen Stellen nicht stetig ist. Solche Funktionen nennt man* **stückweise stetig**.

4.1.4 Satz. *Stückweise stetige Funktionen sind integrierbar.*

Beweis. Wir behandeln den Fall $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Sei $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ eine Zerlegung. Wir können die Riemannsche Summe Z_n nach unten abschätzen durch die Untersumme

$$U_n = \sum_{i=1}^{n} \min_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)(x_i - x_{i-1})$$

und nach oben durch die Obersumme

$$O_n = \sum_{i=1}^{n} \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)(x_i - x_{i-1})$$

Wir zeigen

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} O_n$$

und damit auch die Konvergenz von $\lim_{n\to\infty} Z_n$ gegen den selben Grenzwert. Die Folge der Obersummen ist monoton fallend, die der Untersummen monoton wachsend. Wegen $U_n < O_n$ sind beide Folgen beschränkt, also konvergent.
Sei $\varepsilon > 0$. Nach Satz 3.1.10 d) ist f auf $[a, b]$ gleichmäßig stetig, d.h. zu ε gibt es ein $\delta > 0$, so dass

$$|f(x) - f(x')| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } |x - x'| \leq \delta \ .$$

Sei n groß genug, so dass $|x_i - x_{i-1}| \leq \delta$ für alle i. Dann gilt

$$|f(x) - f(x')| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } x, x' \in [x_{i-1}, x_i] \ .$$

Es folgt

$$\max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \ - \ \min_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \leq \varepsilon$$

und daher

$$O_n - U_n \leq \sum_{i=1}^{n} \varepsilon(x_i - x_{i-1}) = \varepsilon(b - a) \ .$$

Damit ist die Gleichheit der Grenzwerte gezeigt.
Wir betrachten nun eine andere Folge von Zerlegungen. Die Untersumme zu einer Zerlegung ist stets kleiner als die Obersumme zur anderen (und umgekehrt). Daher stimmen die Grenzwerte auch für verschiedene Zerlegungen überein. □

4.1.5 Bemerkung. Da f auf jedem Teilintervall sein Maximum und Minimum annimmt, sind Obersumme und Untersumme spezielle Riemannsche Summen.

4.1.6 Satz. *Seien f, g stückweise stetige Funktion auf $[a,b]$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $c \in [a,b]$. Es gelten:*

a) $\int\limits_a^b \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)\, dx = \alpha \int\limits_a^b f(x)\, dx + \beta \int\limits_a^b g(x)\, dx,$

b) $\int\limits_a^b f(x)\, dx = \int\limits_a^c f(x)\, dx + \int\limits_c^b f(x)\, dx,$

c) $f(x) \le g(x) \quad \Rightarrow \quad \int\limits_a^b f(x)\, dx \le \int\limits_a^b g(x)\, dx.$

Beweis. Wir betrachten a). Wir wählen eine Folge von Zerlegungen

$$a = x_0 < x_1 \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

und eine Folge von Zwischenwerten. Nach Definition gilt

$$\begin{aligned}
\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1} (\alpha f(\xi_i) + \beta g(\xi_i))(x_i - x_{i-1}) \\
\int_a^b f(x) dx &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \\
\int_a^b g(x) dx &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1} (\xi_i)(x_i - x_{i-1})
\end{aligned}$$

Die Aussage folgt nun aus den Rechenregeln für Grenzwerte von Folgen. Die übrigen Aussagen folgen ähnlich direkt aus der Definition. □

4.1.7 Satz. *Sei f auf $[a,b]$ stückweise stetig.*

a) Aus $m \le f(x) \le M$ für alle $x \in [a,b]$ folgt

$$m(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)\, dx \le M(b-a)\,.$$

b) Es gilt die Ungleichung

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Beweis. Wie Satz 4.1.6 aus der Definition und den Abschätzungen für Grenzwerte von Folgen. □

4.1.8 Satz (Mittelwertsatz der Integralrechnung)**.** *Sei f auf $[a,b]$ stetig und g auf $[a,b]$ nichtnegativ und stückweise stetig. Dann gibt es ein $\xi \in [a,b]$ mit*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx.$$

Beweis. Sei m das Minimum und M das Maximum von f auf $[a,b]$. Auf $[a,b]$ gilt

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x) \Rightarrow m \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx\ .$$

Daher ist

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = c \int_a^b g(x)dx$$

mit einer Zahl $c \in [m,M]$. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es ein $\xi \in [a,b]$ mit $f(\xi) = c$. □

• Der Spezialfall $g(x) = 1$ zeigt, dass es ein $\xi \in [a,b]$ gibt, so dass

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)\,(b-a). \tag{1.4}$$

4.1.9 Definition. *Man nennt eine auf dem Intervall I differenzierbare Funktion F eine* **Stammfunktion** *von f, wenn $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in I$ gilt.*

4.1.10 Satz (Hauptsatz der Differential und Integralrechnung)**.**
Ist f eine auf dem Intervall I stetige Funktion, dann gilt:

a) Die durch

$$F_a(x) := \int\limits_a^x f(t)\,dt \qquad a, x \in I$$

definierte Funktion ist eine Stammfunktion von f, d.h.

$$\frac{d}{dx}\left(\int\limits_a^x f(t)\,dt\right) = f(x). \tag{1.5}$$

Jede andere Stammfunktion F von f hat die Form $F(x) = F_a(x) + c, c \in \mathbb{R}$.

b) Mit einer beliebigen Stammfunktion F von f gilt:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b := F(b) - F(a). \tag{1.6}$$

Beweis. Wir bilden den Differenzenquotienten für F_a. Nach den Rechenregeln für Integrale und dem Mittelwertsatz 4.1.9 gilt

$$\begin{aligned} F_a(x+h) - F_a(x) &= \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \\ &= \int_x^{x+h} f(t)dt \\ &= f(\xi_h)h \end{aligned}$$

mit $\xi_h \in [x, x+h]$. Mit $h \to 0$ gilt $\xi_h \to x$. Da f stetig ist, folgt

$$F_a'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h} = \lim_{h \to 0} f(\xi_h) = f(x)\ .$$

Ist F eine andere Stammfunktion, so gilt

$$(F - F_a)' = F' - F_a' = f - f = 0\ .$$

Es ist ein einfache Konsequenz des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung 3.3.3, dass dann $F - F_a$ konstant ist.
In b) ist nun $F_a = F - c$. Es folgt also

$$\int_a^b f(x)dx = F_a(b) - F_a(a) = F(b) - c - F(a) + c = F(b) - F(a)\ .$$

$\square$

• Für die Berechnung des bestimmten Integrals ergibt sich damit das Verfahren:

1) Berechne die Stammfunktion F von f, d.h. $F' = f$.

2) $\int_a^b f(x)dv = F(b) - F(a)$

4.1.11 Definition. *Die Menge aller Stammfunktionen von f wird mit $\int f\,dx$ bezeichnet und heißt* **unbestimmtes Integral** *von f.*

• Nach Satz 4.1.10 a) gilt

$$\int f(x)\,dx = F + c,$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist und F eine feste Stammfunktion von f. Somit haben wir

$$\int f(x)\,dx = F + c \quad \Leftrightarrow \quad F' = f. \tag{1.7}$$

• Aus den Differentationsformeln folgen somit folgende Integrationsformeln:

$F(x)$	$f(x) = F'(x)$	Bemerkungen
$\frac{1}{n+1}\, x^{n+1}$	x^n	$n \neq -1$
$\frac{1}{a+1}\, x^{a+1}$	x^a	$a \in \mathbb{R}, x > 0$
$\ln\, \lvert x \rvert$	x^{-1}	$x \neq 0$
$-\cos\, x$	$\sin x$	
$\sin\, x$	$\cos\, x$	
$\tan\, x$	$\frac{1}{\cos^2\, x}$	$x \neq (k+\frac{1}{2})\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\cot\, x$	$\frac{-1}{\sin^2 x}$	$x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\arcsin\, x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\lvert x \rvert < 1$
$\arctan\, x$	$\frac{1}{1+x^2}$	
$\frac{1}{a}\, e^{ax}$	e^{ax}	$a \neq 0$
$\cosh x$	$\sinh x$	
$\sinh x$	$\cosh x$	
$\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$	$\frac{1}{1-x^2}$	$\lvert x \rvert \leq 1$
$\ln(x + \sqrt{1+x^2}\,)$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	

4.2 Integrationsregeln

Alle Rechenregeln für die Ableitung werden nun zu Rechenregeln für das Integral.

4.2.1 Linearität**.** *Aus $F' = f, G' = g$ folgt $af + bg = aF' + bG'$. Somit gilt für das unbestimmte Integral*

$$\int \big(af(x) + bg(x)\big)\, dx = a \int f(x)\, dx + b \int g(x)\, dx. \tag{2.1}$$

Beweis. Nach dem Hauptsatz der Differential und Integralrechnung berechnen wir die Stammfunktion als $\int\limits_a^x$. Die Aussage folgt dann aus der Rechenregel für das bestimmte Integral Satz 4.1.6. □

4.2.2 Partielle Integration**.** *Die Produktregel* $(uv)' = u'v + uv'$ *liefert, dass* uv *eine Stammfunktion von* $u'v + uv'$ *ist, d.h.*

$$\int u'(x)v(x)\,dx = u\,v - \int u(x)v'(x)\,dx. \tag{2.2}$$

Für das bestimmte Integral erhalten wir

$$\int_a^b u'\,v\,dx = u(x)\,v(x)\Big|_a^b - \int_a^b uv'\,dx. \tag{2.3}$$

4.2.3 Beispiel. Aus (2.2) folgt mit $u' = 1$

$$\int v(x)\,dx = x\,v - \int xv'(x)\,dx, \tag{2.4}$$

insbesondere also:

$$\int \ln x\,dx = x \ln x - \int x\frac{1}{x}\,dx = x(\ln x - 1) + c. \tag{2.5}$$

4.2.4. *Für Integrale der Form*

$$\begin{aligned} S_n &:= \int_a^b (\sin x)^n\,dx, & C_n &:= \int_a^b (\cos x)^n\,dx, \\ A_n &:= \int_a^b x^n \sin x\,dx, & B_n &:= \int_a^b x^n \cos x\,dx, \\ E_n &:= \int_a^b x^n e^x\,dx, & L_n &:= \int_a^b (\ln x)^n\,dx \end{aligned} \tag{2.6}$$

kann man durch wiederholtes Anwenden von partieller Integration eine Rekursionsformel herleiten.

Beweis. Wir behandeln beispielhaft S_2.

Mit $u' = \sin x$, $v = \sin x$ erhalten wir $u = -\cos x$, $v' = \cos x$

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x dx &= -\cos x \sin x - \int -\cos x \cos x dx \\ &= -\cos x \sin x + \int \cos^2 x \\ &= -\cos x \sin x + \int (1 - \sin^2 x) dx \\ &= -\cos x \sin x + x - \int \sin^2 x dx \ .\end{aligned}$$

Diese Gleichung lösen wir auf zu

$$\int \sin^2 x dx = -\frac{1}{2}(x - \cos x \sin x) \ .$$

$\square$

4.2.5 Substitutionsmethode**.** *Aus der Kettenregel für die Ableitung* $(F(g(x))' = F'\big(g(x)\big)\, g'(x)$ *folgt mit* $f(x) = F'(x)$

$$\int f\big(g(x)\big)\, g'(x)\, dx = F\big(g(x)\big) + c \tag{2.7}$$

und für das bestimmte Integral

$$\int_a^b f\big(g(x)\big) g'(x)\, dx = F\big(g(b)\big) - F\big(g(a)\big) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\, dt. \tag{2.8}$$

• Ein konkreter Fall ist

$$\int f^k(x) f'(x) dx = \frac{1}{k+1} f^{k+1} \qquad k \neq -1 \ .$$

Besonders interessant ist der Fall $k = 1$:

$$\int f f' dx = \frac{1}{2} f^2 \ .$$

• Es gibt zwei Möglichkeiten (2.8) anzuwenden. Beide nutzen die suggestive Schreibweise $g' = \frac{dg}{dx}$ und lösen nach dx bzw. dg auf.

1) Berechnung von $\int f\big(g(x)\big)\, g'(x)\, dx$

   a) Substitution $g(x) = t\,, \quad g'(x)\, dx = dt$

   b) Berechnung von $\int f(t)\, dt = F(t) + c$

   c) Rücksubstitution $t = g(x)$ und somit $\int f\big(g(x)\big)\, g'(x)\, dx = F\big(g(x)\big)$

2) Berechnung von $\int f(x)\, dx$

   a) Substitution $x = g(t)\,, \quad dx = g'(t)\, dt$ mit „geeigneter“ umkehrbarer Funktion g

   b) Berechnung von $\int f\big(g(t)\big) g'(t)\, dt = H(t) + c$

   c) Auflösen von $x = g(t)$ nach t, d.h. $t = h(x)$, und somit ergibt sich $\int f(x)\, dx = H\big(h(x)\big) + c$

4.2.6 Bemerkung. Anders als bei der Differentiation gibt es keine klare Vorschrift, wie ein gegebenes kompliziertes Integral auf eines der elementaren wohlbekannten Integrale zurückzuführen ist. Umgekehrt lassen sich jedoch gefundene Formeln leicht durch Differentiation verifizieren.

4.2.7 Symmetrien**.** *Integrale lassen sich leichter berechnen wenn man Symmetrien des Integranden und des Integrationsbereiches beachtet. Beispiele hierfür sind gerade und ungerade Integranden. Für eine gerade Funktion, d.h.* $f(-x) = f(x)$ *gilt*

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\, dx = 2 \int\limits_{0}^{a} f(x)\, dx$$

und für eine ungerade Funktion, d.h. $f(-x) = -f(x)$, *gilt*

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0.$$

4.2.8 Lemma (Orthogonalitätsbeziehungen)**.** *1. Für* $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ *gilt*

$$\begin{aligned} \int\limits_{0}^{2\pi} \sin(kx)\, dx &= 0, \\ \int\limits_{0}^{2\pi} \cos(kx)\, dx &= 0. \end{aligned} \tag{2.9}$$

2. Sei $m, n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt:

$$\int\limits_0^{2\pi} \sin(mx)\sin(nx)\,dx = \begin{cases} 0 & \textit{falls } m = n = 0, \\ 0 & \textit{falls } m \neq n, \\ \pi & \textit{falls } m = n \neq 0, \end{cases}$$

$$\int\limits_0^{2\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,dx = \begin{cases} 2\pi & \textit{falls } m = n = 0, \\ 0 & \textit{falls } m \neq n, \\ \pi & \textit{falls } m = n \neq 0, \end{cases} \tag{2.10}$$

$$\int\limits_0^{2\pi} \cos\, mx \sin\, nx\,dx = 0.$$

Beweis. Für $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ und $\varphi \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int\limits_0^{2\pi} \sin(kx\ + \varphi)\,dx = -\tfrac{1}{k}\, cos(kx + \varphi)\Big|_0^{2\pi} = 0. \tag{2.11}$$

Somit erhält man für $\varphi = 0$ oder $\varphi = -\pi$ die Formeln in (2.9).
Mit Hilfe der Additionstheoreme erhalten wir:

$$\sin(mx)\sin(nx) = \tfrac{1}{2}\big(\cos((m-n)x) - \cos((m+n)x)\big),$$

Also folgt für das Integral

$$\int_0^{2\pi} \sin(mx)\sin(nx) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos((m-n)x)dx - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos((m+n)x)dx\ .$$

Für $m \neq \pm n$ verschwinden beide Summanden.
Wegen $m, n \geq 0$ tritt der Fall $m+n = 0$ nur im trivialen Fall $m = n = 0$ auf.
Für $m = n$ ist $m-n = 0$ und $m+n \neq 0$ (außer im trivialen Fall $m = n = 0$), daher verschwindet der zweite Summand. Der erste vereinfacht sich zu

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(nx) = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} dx = \pi\ .$$

$\square$

4.3 Integration rationaler Funktionen

4.3.1 Partialbruchzerlegung**.** *Sei* $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ *eine rationale Funktion mit Grad* $p <$ *Grad* q *und teilerfremden Polynomen* p *und* q*. Eine* **Partialbruchzerlegung** *besteht auf folgenden Schritten:*

1) Finden einer Faktorisierung von $q(x)$*, d.h.*

$$q(x) = c(x - b_1)^{k_1} \cdots (x - b_r)^{k_r} \cdots q_1(x)^{l_1} \cdots q_s(x)^{l_s}$$

mit paarweise verschiedenen, reellen Nullstellen b_j *der Vielfachkeit* k_j *und paarweise verschiedenen, quadratischen Polynomen* q_j*, die keine reellen Nullstellen besitzen.*

2) Für jede Nullstelle $b \in \{b_1, \cdots, b_r\}$ *der Vielfachkeit* k *und jedes quadratische Polynom* $Q \in \{q_1, \cdots, q_s\}$ *der Vielfachheit* l *bilden wir Funktionen der Form*

$$\begin{array}{cccc} \dfrac{A_1}{x-b}, & \dfrac{A_2}{(x-b)^2}, & \cdots, & \dfrac{A_k}{(x-b)^k}, \\ \dfrac{B_1 x + C_1}{Q(x)}, & \dfrac{B_2 x + C_2}{(Q(x))^2}, & \cdots, & \dfrac{B_l x + C_l}{(Q(x))^l} \end{array}$$

wobei A_i, B_i, C_i *reelle Koeffizienten sind.*

3) Diese Funktionen heißen **Partialbrüche***. Man setzt nun die rationale Funktion* $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ *als Summe obiger Partialbrüche an, wobei die Koeffizienten* A_i, B_i, C_i *zu bestimmen sind:*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{k_i} \frac{A_j}{(x - b_i)^j} + \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{l_i} \frac{B_j x + C_j}{(Q_i)^j}$$

• Die dabei auftretenden Integrale berechnen sich wie folgt:

$$\int \frac{dx}{x \pm a} = \ln|x \pm a| + c, \tag{3.1}$$

$$\int \frac{dx}{(x \pm a)^k} = \frac{1}{1-k}(x \pm a)^{1-k} + c, \qquad k \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}, \tag{3.2}$$

und falls $4q - p^2 > 0$, gilt

$$\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}} \arctan \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + c, \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{ax+b}{x^2+px+q}\, dx &= \frac{a}{2} \ln|\, x^2+px+q| \\ &\quad + \Big(b - \frac{ap}{2}\Big) \int \frac{dx}{x^2+px+q}\,, \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k} &= \frac{2x+p}{(k-1)(4q-p^2)(x^2+px+q)^{k-1}} \\ &\quad + \frac{2(2k-3)}{(k-1)(4q-p^2)} \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{k-1}}\,, \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{ax+b}{(x^2+px+q)^k}\, dx &= \frac{a}{2(k-1)(x^2+px+q)^{k-1}} \\ &\quad + \Big(b - \frac{ap}{2}\Big) \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k}\,. \end{aligned} \tag{3.6}$$

4.3.2 Integration von $R(e^x)$**.** *Sei R eine rationale Funktion, dann kann man das Integral*

$$\int R(e^{ax})\, dx$$

durch die Substitution $t = e^{ax}, dx = \frac{1}{at}\, dt$ auf das Integral

$$\int R(t)\, \frac{1}{at}\, dt$$

zurückführen und somit berechnen, denn $\frac{R(t)}{at}$ ist wiederum eine rationale Funktion.

4.3.3 Integration von $R\big(x, \sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}}\big)$**.** *Sei $R(x,y)$ ein rationaler Ausdruck in x und y, d.h. $R(x,y)$ entsteht aus x, y und Konstanten allein durch die vier Grundrechenarten. Ein Integral vom Typ $\int R\big(x, \sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}}\big)\, dx$ mit $ad - bc \neq 0$ wird mit der Substitution*

$$t = \sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \qquad \text{d.h. } x = \frac{dt^k - b}{a - ct^k}, \qquad dx = k(ad-bc)\frac{t^{k-1}}{(a-ct^k)^2}\, dt$$

in ein Integral einer rationalen Funktion überführt.

4.3.4 Integration von $R(\sin x, \cos x)$**.** *Sei $R(x,y)$ ein rationaler Ausdruck. Durch die Substitution*

$$x = 2\arctan t, \quad dx = \tfrac{2}{1+t^2}\, dt$$

und somit

$$\cos x = \tfrac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \tfrac{2t}{1+t^2}$$

überführt man das Integral $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$ in ein Integral über eine rationale Funktion in t.

4.3.5 Substitution für bestimmte Integrale**.** *Bei der Berechnung von bestimmten Integralen muss für die Gültigkeit der Formel*

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\, dt$$

überprüft werden ob:

a) $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt ist, wobei I ein abgeschlossenes Intervall ist und

b) $g : [a,b] \to I$ stetig differenzierbar ist.

4.4 Uneigentliche Integrale

Wir wollen den Integralbegriff erweitern auf unbeschränkte Integrationsintervalle $[a, \infty)$ und unbeschränkte Funktionen.

4.4.1 Definition. *Sei $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Die Funktion f sei auf dem Intervall $[a,b)$ definiert und auf jedem abgeschlossenen Teilintervall $[a,c], c < b$, stückweise stetig. Falls der Grenzwert*

$$\lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\, dx$$

existiert, wird das **uneigentliche Integral** *$\int_a^b f(x)\, dx$ definiert durch*

$$\int_a^b f(x)\, dx := \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\, dx.$$

In diesem Fall sagt man, dass das uneigentliche Integral **konvergiert**. *Anderenfalls sagt man, dass es* **divergiert.**

• *Analog definiert man in der entsprechenden Situation für ein rechts halboffenen Intervall* $(a,b]$

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{c\to a^+} \int_a^b f(x)\,dx.$$

Beispiele:

1)

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{c\to\infty} \int_1^c \frac{dx}{x} = \lim_{c\to\infty} \ln c = \infty, \qquad \text{(divergiert)}. \tag{4.1}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{c\to 0^+} -\ln c = \infty, \qquad \text{(divergiert)}. \tag{4.2}$$

2) Sei $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$.

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{c\to\infty} \tfrac{1}{\alpha-1}\left(1 - \tfrac{1}{c^{\alpha-1}}\right) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}, & \text{falls } \alpha > 1, \\ \infty, & \text{falls } \alpha < 1. \end{cases} \tag{4.3}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{c\to 0^+} \tfrac{1}{\alpha-1}\left(\tfrac{1}{c^{\alpha-1}} - 1\right) = \begin{cases} \infty, & \text{falls } \alpha > 1 \\ \frac{1}{1-\alpha} & \text{falls } \alpha < 1. \end{cases} \tag{4.4}$$

4.4.2 Satz. *Ist f auf $[a,\infty)$ und g auf $(0,b]$ stückweise stetig und sind $\alpha, K \in \mathbb{R}$, dann gilt:*

a) $|f(x)| \le K\frac{1}{x^\alpha},\ a \le x < \infty,\ 1 < \alpha \quad \Rightarrow \quad \int_a^\infty f(x)\,dx$ *konvergiert,*

b) $|f(x)| \le K\frac{1}{x^\alpha},\ 0 < x \le b,\ 0 < \alpha < 1 \quad \Rightarrow \quad \int_0^b f(x)\,dx$ *konvergiert.*

4.4.3 Definition. *Sei $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ eine auf jedem abgeschlossenen Teilintervall $[\alpha,\beta]$, $a < \alpha < \beta < b$ stückweise stetige Funktion und sei $c \in (a,b)$. Falls die beiden uneigentlichen Integrale*

$$\int_a^c f(x)\,dx = \lim_{\alpha\to a^+} \int_\alpha^c f(x)\,dx,$$

$$\int_c^b f(x)\,dx = \lim_{\beta\to b^-} \int_c^\beta f(x)\,dx$$

konvergieren, heißt das **uneigentliche Integral** $\int_a^b f(x)\,dx$ *konvergent und ist definiert durch*

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

4.4.4 Ausnahmestellen im Innern**.** *Sei f auf $[a,b]$ definiert und sei $c \in (a,b)$ ein Punkt so, dass f auf $[a,c)$ und $(c,b]$ stückweise stetig ist. Falls die uneigentlichen Integrale $\int_a^c f(x)\,dx$ und $\int_c^b f(x)\,dx$ konvergieren setzen wir*

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Analog wird der Fall endlich vieler solcher „Ausnahmepunkte" $x_i \in [a,b]$ behandelt.

4.4.5 Cauchyscher Hauptwert**.** *Es kann passieren, dass die beiden uneigentlichen Integrale aus 4.4.4 divergieren, aber dass der Grenzwert*

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx \,+\, \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx\right) \tag{4.5}$$

existiert. In diesem Fall wird der Grenzwert in (4.5) **Cauchyscher Hauptwert** *genannt und mit*

$$CHW\int_a^b f(x)\,dx$$

bezeichnet.

4.5 Kurven-, Längen- und Flächenmessung

Unter einer **Kurve** versteht man eine differenzierbare Abbildung eines Intervalls I in die Ebene.

4.5.1 Definition. *Sei der $\mathbb{R}^2$ mit einem festen kartesischen Koordinatensystem versehen. Dann nennt man die vektorwertige Funktion*

$$\vec{r} : [a,b] \;\to\; \mathbb{R}^2 : t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \tag{5.1}$$

wobei $x : [a,b] \to \mathbb{R}, y : [a,b] \to \mathbb{R}$ zwei differenzierbare Funktionen sind, eine **Parameterdarstellung** *der* **Kurve***, t den* **Parameter** *und $[a,b]$ das* ***Parameterintervall****.*

4.5.2 Beispiel. Ein Kreis K mit Radius r rollt auf der x-Achse. Der Punkt P mit Abstand a vom Kreismittelpunkt beschreibt eine **Zykloide**, die die Parameterdarstellung

$$\begin{aligned} x &= rt - a\sin t, \\ y &= r \;\; - a\cos t, \end{aligned}$$

hat, wobei t der Rollwinkel ist.

4.5.3 Definition. *Zu jeder Parameterdarstellung $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))^T$ einer Kurve K definiert man den* **Tangentialvektor**

$$\dot{\vec{r}}(t) := \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\big(\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)\big) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}, \tag{5.2}$$

wobei der Punkt die Ableitung nach t bedeutet.

- Wenn $\vec{r}(t)$ die Bewegung eines Massenpunktes auf einer Kurve beschreibt, dann beschreibt $\dot{\vec{r}}(t)$ die Geschwindigkeit des Punktes zum Zeitpunkt t.
- Sei in einem Kurvenpunkt $(x(t), y(t))^T$ der Tangentialvektor $\dot{\vec{r}}(t) \neq \vec{0}$. Der **Normalenvektor** $\vec{n}(t)$ entsteht aus dem Tangentialvektor durch Drehung um 90° in positive Richtung, d.h.

$$\vec{n}(t) := \begin{pmatrix} -\dot{y}(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix}. \tag{5.3}$$

- Zum Zeitpunkt t_0 haben die Tangente bzw. Normale an die Kurve K die Darstellung

$$\begin{array}{lll} \text{Tangente:} & x = x(s) = x(t_0) + s\dot{x}(t_0), & y = y(s) = y(t_0) + s\dot{y}(t_0), \\ \text{Normale :} & x = x(s) = x(t_0) - s\dot{y}(t_0), & y = y(s) = y(t_0) + s\dot{x}(t_0), \end{array}$$

  wobei $s \in \mathbb{R}$ der Geradenparameter ist.

4.5.4 Definition Die Bogenlänge. *Sei $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ eine äquidistante Zerlegung von $[a, b]$, d.h. $t_i - t_{i-1} = \Delta t$, $\forall i = 1, \ldots, n$. Die Kurve*

K wird durch die Sekanten, die $(x(t_i), y(t_i))$ und $(x(t_{i+1}), y(t_{i+1}))$ verbinden, angenähert. Die Länge dieser Approximation ist

$$P_n := \sum_{i=1}^{n} \|\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})\| .$$

Falls der Grenzwert $n \to \infty$ der Folge $(P_n)_{n\geq 1}$ existiert, wird er **Länge der Kurve** *K genannt.*

4.5.5 Definition. *Eine Parameterdarstellung $x = x(t),\ y = y(t), \quad t \in [a, b]$ einer Kurve heißt* **regulär***, wenn die Funktionen $t \mapsto x(t),\ t \mapsto y(t)$ stetig differenzierbar sind und $\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) \neq 0$ für alle $t \in [a, b]$ gilt, dabei sind die Ableitungen in den Endpunkten einseitige Ableitungen.*

4.5.6 Satz. *Die Länge L einer Kurve mit regulärer Parameterdarstellung $x = x(t),\ y = y(t),\ \dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) \neq 0,\ a \leq t \leq b$, beträgt*

$$L = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\, dt. \tag{5.4}$$

Beweis. Wir benutzen die Definition und zerlegen das Intervall durch äquidistante Punkte t_i. Die Länge der Sekante zwischen $\vec{r}(t_{i-1})$ und $\vec{r}(t_i)$ ist mit dem Mittelwertsatz der Differentialrechung

$$\Delta s_i = \sqrt{\Delta y_i^2 + \Delta x_i^2} = \Delta t \sqrt{\dot{y}\left(\zeta_i\right)^2 + \dot{x}\left(\eta_i\right)^2}$$

für geeignete $\eta_i, \zeta_i \in (t_i, t_{i+1})$. Beim Grenzübergang $\Delta t_i \to 0$ gilt dann $\eta_i, \zeta_i \to t_i$.
Durch Aufsummieren erhalten wir

$$P_n = \sum_i \Delta s_i \ .$$

Nach Definition ist $\lim_{n\to\infty} P_n = L$. Gleichzeitig sind die P_n nach Definition Riemansche Summen der Funktion $\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$. Diese sind stetig, also integrierbar, und wir erhalten.

$$L = \lim_{n\to\infty} P_n = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt \ .$$

□

4.5.7 Folgerung. *Der Graph $y = f(x)$ einer stetig differenzierbaren Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ hat die Länge*

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx. \tag{5.5}$$

4.5.8 Krümmung**.** *Es sei $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))^T$ eine reguläre, zweimal differenzierbare Parameterdarstellung einer Kurve. Mit $\varphi(t)$ bezeichnen wir den positiv gemessenen Winkel zwischen der positiven x-Achse und dem Tangentialvektor $\vec{r}$, sei $s(t) := \int_a^t \sqrt{\dot{x}^2(\tau) + \dot{y}^2(\tau)}\, d\tau$ die Länge des Kurvenstücks über dem Parameterintervall $[a, t]$. Die Änderung $\Delta\varphi$ bezogen auf die Änderung der Länge Δs ist ein Maß für die durchschnittliche Krümmung der Kurve. Demzufolge definiert man die* **Krümmung** *der Kurve im Punkt $P = (x(t), y(t))^T$ als*

$$K(t) := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi(t)}{\Delta s(t)} = \frac{\dot{\varphi}(t)}{\dot{s}(t)}.$$

4.5.9 Satz. *Die Krümmung einer Kurve mit regulärer, zweimal differenzierbarer Parameterdarstellung $x = x(t),\ y = y(t),\quad t \in [a, b]$, beträgt im Kurvenpunkt $P(t) = (x(t), y(t))^T$*

$$K(t) = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)}{(\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t))^{\frac{3}{2}}}\,. \tag{5.6}$$

4.5.10 Folgerung. *Die Krümmung des Graphen $y = f(x)$ einer zweimal differenzierbaren Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ im Punkt $(x, f(x))$ beträgt*

$$K(x) = \frac{f''(x)}{\left(\sqrt{1 + (f')^2(x)}\right)^3}\,. \tag{5.7}$$

• Einen durch den Kurvenpunkt $P = (x(t), y(t))^T$ gehenden Kreis nennt man **Krümmungskreis** der Kurve in P, wenn er dieselbe Krümmung und denselben Tangentialvektor wie die Kurve besitzt. Der Radius r des Krümmungskreises heißt **Krümmungsradius** in P und ist gegeben durch:

$$r = \frac{1}{|K|}\,.$$

4.5.11 Polardarstellung einer Kurve. *Analog zu den komplexen Zahlen kann man für eine mit einem kartesischen Koordinatensystem versehene Ebene Polarkoordinaten einführen. Sei $P = (x, y)$ ein Punkt in der Ebene, dann sind der Abstand r des Punktes vom Ursprung und der Drehwinkel φ, der den Punkt $(r, 0)$ in (x, y) überführt, die* **Polarkoordinaten** *von P. Wir haben folgende Beziehungen:*

$$a) \quad x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi,$$

$$b) \quad r = \sqrt{x^2+y^2}\,, \qquad \varphi = \begin{cases} \arccos\dfrac{x}{r}, & \textit{falls } y \geq 0, \\ 2\pi - \arccos\dfrac{x}{r}, & \textit{falls } y < 0, \\ \textit{unbestimmt}, & \textit{falls } r = 0. \end{cases}$$

• Wenn ein Zeiger mit Fußpunkt im Ursprung, der seine Länge ändert, sich um den Ursprung bewegt, erhalten wir eine Kurve. Die Parameterdarstellung

$$r = r(\varphi)\ ,\ \alpha \leq \varphi \leq \beta$$

der Kurve mit Parameter φ heißt **Polardarstellung**, wobei der Winkel φ von der positiven x-Achse aus gemessen wird. Aus der Polardarstellung $r(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$ erhält man folgende Parameterdarstellung mit dem Polarwinkel φ als Parameter

$$x = r(\varphi)\cos\varphi, \quad y = r(\varphi)\sin\varphi, \quad \varphi \in [\alpha, \beta]. \tag{5.8}$$

Aus Satz 4.5.6 erhält man für die Länge der Kurve $r(\varphi),\ \varphi \in [\alpha, \beta]$

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\varphi) + \left(\frac{d\,r(\varphi)}{d\,\varphi}\right)^2}\, d\varphi\,.$$

• Nach Definition misst das Integral einer positiven Funktion die Fläche unter dem Graphen. Dies lässt sich auch auf Flächen mit komplizierter Berandung verallgemeinern.

4.5.12 Satz. *Sind $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, $a < b$, dann beträgt der Inhalt der von den vier Kurven $y = f(x),\ y = g(x),\ x = a,\ x = b$ berandeten Fläche*

$$F = \int_a^b |f(x) - g(x)|\ dx.$$

Beweis. Wir betrachten den wesentlichen Fall $0 < g < f$. Dann ist die Fläche zwischen f und g die Differenz der Fläche unter dem Graphen von f und dem Graphen von g, also

$$F = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx \ .$$

□

4.5.13 Satz. *Sei $r : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}_0^+$ stetig, $\alpha < \beta$. Wir fassen $r(\varphi), \varphi)$ als Kurve in Polarkoordinaten auf. Dann beträgt der Inhalt der von den drei Kurven $r = r(\varphi), \quad \varphi = \alpha, \quad \varphi = \beta$ berandeten Sektorfläche*

$$F = \frac{1}{2}\int\limits_a^b r^2(\varphi)\, d\varphi$$

Beweis. Die Sektorfläche zwischen φ und $\varphi + \Delta\varphi$ hat angenähert den Flächeninhalt eines Kreissektors mit Radius $r(\varphi)$, d.h.

$$\Delta F = \frac{\Delta\varphi}{2\pi}\left(r(\varphi)\right)^2 \pi = \frac{1}{2} r(\varphi)^2 \Delta\varphi \ .$$

Wir summieren und können wieder die Summe als Riemannsumme interpretieren. Im Grenzübergang $\Delta\varphi \to 0$ erhalten wir die Aussage. □

4.5.14 Satz. *Ist $x = x(t),\ y = y(t),\ a \leq t \leq b$ eine stückweise stetig differenzierbare Parameterdarstellung einer Kurve K, die von jedem Ursprungsstrahl höchstens einmal getroffen wird, dann beträgt der Inhalt der durch K begrenzten Sektorfläche*

$$F = \frac{1}{2}\left|\int\limits_a^b \left(x(t)\dot{y}(t) - y(t)\dot{x}(t)\right)\, dt\right| .$$

Beweis. Mit $\varphi = \arctan\frac{y(t)}{x(t)}$ und Substitionsregel folgt dies aus Satz 4.5.13. □

4.5.15 Beispiel. Der Inhalt der Ellipse $x = a\cos t, y = b\sin t$ beträgt

$$F = \frac{1}{2}(ab\cos^2 t + ab\sin^2 t)dt = ab\pi \ .$$

4.5.16 Satz. *Die Formel aus Satz 4.5.14 gilt auch für geschlossene überschneidungsfreie Kurven mit stückweise stetig differenzierbarer Parameterdarstellung* $x = x(t), y = y(t), t \in [a,b]$.

4.5.17 Redeweisen und Bezeichnungen**.** *Sei* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *eine stetige positive Funktion. Der Flächeninhalt* F *unter dem Graphen von* f *ist gegeben durch*

$$F = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x\,,$$

wobei wir eine äquidistante Zerlegung gewählt haben. Mit der Bezeichnung $\Delta F_i := f(\xi_i)\Delta x$ *haben wir also*

$$F = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n \Delta F_i.$$

Es ist üblich eine Differenz Δx *mit* dx *zu bezeichnen, wenn man im Verlauf der Rechnung den Grenzübergang* $\Delta x \to 0$ *durchführen will. Bei diesem Grenzübergang geht das Summenzeichen* $\sum$ *in das Integral* $\int$ *über. In Analogie dazu bezeichnen wir auch* ΔF *mit* dF *und ersetzen für den Grenzübergang das Summenzeichen durch das Integral. Somit erhalten wir:*

$$F = \int dF \qquad \text{und} \qquad F = f(x)\,dx.$$

Diese Überlegungen kann man verallgemeinern. Sei G *eine reelle Größe, die man in kleine „Bausteine“ oder Elemente* dG *zerlegen kann und die „aufsummiert“ wieder* G *ergeben. Die Summation wird als Integral bezeichnet, und somit haben wir*

$$G = \int dG. \tag{5.9}$$

Weiterhin möchte man dG *durch eine von* x *abhängige Größe der Form*

$$dG = f(x)\,dx \tag{5.10}$$

annähern und erhält also

$$G = \int f(x)\,dx.$$

Beispiel: Sei K eine Kurve mit der Parameterdarstellung $x = x(t)$, $y = y(t),\ t \in [a, b]$, dann ist die Länge L gegeben durch (Satz 4.5.6)

$$L = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt.$$

Andererseits haben wir

$$L = \int ds,$$

wobei ds ein Längenelement ist. Ein Vergleich beider Formeln liefert

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt\,. \tag{5.11}$$

Insbesondere erhalten wir im Falle eines Graphen $y = f(x)$ die Formel

$$ds = \sqrt{1 + (f')^2}\, dx\,. \tag{5.12}$$

4.5.18 Volumen von Rotationskörpern**.** *Sei K ein Rotationskörper, der durch Rotation einer Kurve $y = f(x)$ um die x-Achse entsteht. Sei $F(x),\ x \in [a, b]$, der Flächeninhalt des Querschnittes. Das Volumenelement dV einer „dünnen Scheibe“ der Dicke dx ergibt sich also zu*

$$dV = F(x)\, dx\,,$$

und somit erhalten wir

$$V = \int dV = \int_a^b F(x)\, dx\,.$$

Die Fläche $F(x)$ des Querschnittes errechnet sich durch

$$F(x) = \pi\, (f(x))^2\ ,$$

wenn $f(x)$ die den Rotationskörper beschreibende Kurve ist. Somit gilt:

4.5.19 Satz. *Ein durch Drehung der Kurve $y = f(x),\ a \le x \le b$, um die x-Achse erzeugter Rotationskörper hat das Volumen*

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx\,.$$

4.5.20 Beispiel. Ein **Kreiskegel** entsteht durch Rotation von $y = \frac{r}{h}x$ um x-Achse. Daher

$$\Rightarrow \quad V = \pi \frac{r^2}{h^2} \int\limits_0^h x^2\, dx = \pi \frac{r^2}{h^2} \frac{1}{3} h^3 = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

4.5.21 Oberfläche von Rotationskörpern**.** *Sei K ein Rotationskörper der durch Drehung der Kurve $y = f(x)$, $x \in [a,b]$ entsteht. Das Oberflächenelement dM des Mantels wird approximiert durch die Mantelfläche eines Zylinders mit dem Radius $f(x)$ und der Höhe $ds = \sqrt{1 + (f')^2}\, dx$. Also gilt*

$$M = \int dM = 2\pi \int f(x) \sqrt{1 + (f')^2}\, dx\,. \tag{5.13}$$

4.5.22 Beispiel. Die **Kugeloberfläche** wird beschrieben durch die Gleichung

$$x^2 + y^2 = r^2$$

d.h., sie ist die Rotationsfläche von

$$y = \sqrt{r^2 - x^2} \quad x \in [-r, r]$$

Wir erhalten

$$y' = \frac{-2x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

und daher

$$\begin{aligned} M &= 2\pi \int \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\, dx \\ &= 2\pi \int \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{\frac{r^2 - x^2 + x^2}{r^2 - x^2}}\, dx \\ &= 2\pi r \int\limits_{-r}^{r} dx = 2\pi r x \Big|_{-r}^{r} = 2\pi r^2 + 2\pi r^2 \\ &= 4\pi r^2 \end{aligned}$$

Kapitel 5

Reihenentwicklungen

Eine effektive Methode bei der Lösung vieler Probleme ist die Darstellung einer Funktion $f(x)$ als eine unendliche Reihe

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$$

mit „einfachen" Funktionen $f_k(x)$. Solche Reihen heißen im Falle $f_k(x) = a_k x^k$ Potenzreihen und im Falle $f_k(x) = a_k \cos kx + b_k \sin kx$ Fourier - Reihen.

5.1 Wiederholung und Ergänzung

- Die Konvergenz von Reihen wurde bereits in Kapitel 2.5 behandelt. Eine Reihe konvergiert **absolut**, wenn die Reihe über die Absolutbeträge konvergiert (vergleiche Definition 2.5.11).

- Das Cauchy-Produkt zweier absolut konvergenter Reihen konvergiert gegen das Produkt der Grenzfunktionen (vergleiche Satz 2.5.16).

- Für Folgen und Reihen von Funktionen gibt es verschiedene Konvergenzbegriffe. Eine Folge von Funktionen $(f_n)_{n\geq 0}$ auf einem Intervall I konvergiert **punktweise**, wenn für jedes $x \in I$ die Folge $(f_n(x))_{n\geq 0}$ konvergiert (vergleiche Definition 2.6.1).

- Sie konvergiert **gleichmäßig**, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ einen Index n_0 gibt, so dass für alle $x \in I$ und $n \geq n_0$ gilt

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

(vergleiche Definition 2.6.2).

- $(f_n)_{n\geq 0}$ gleichmäßig konvergent. Sind alle f_n stetig, so ist die Grenzfunktion stetig (vergleiche Satz 3.2.11).

- Sei $(f_n)_{n\geq 0}$ punktweise konvergent, alle f_n stetig differenzierbar und die Folge $(f_n')_{n\geq 0}$ gleichmäßig konvergent. Dann ist f stetig differenzierbar und $f' = \lim_{n\to\infty} f_n'$ (vergleiche Satz 3.2.12).

- **Potenzreihen** $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ sind ein besonders wichtiges Beispiel. Sie haben einen Konvergenzradius R, in dessen Inneren sie absolut konvergieren, auf jeden abgeschlossenen Teilintervall sogar gleichmäßig (vergleiche Satz 2.6.6). Dort sind sie beliebig oft differenzierbar, insbesondere auch stetig.

5.1.1 Satz. *Konvergiert die Folge stetiger Funktionen f_n, $n \geq 0$, auf dem Intervall I gleichmäßig gegen $f : I \to \mathbb{R}$, dann gilt für alle $a, b \in I$*

$$\int_a^b \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx\,.$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung existiert ein n_0, so dass für alle $n \geq n_0$ und alle $x \in I$ gilt $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Hieraus folgt mit Satz 4.1.7

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\, dx - \int_a^b f_n(x)\, dx\right| &\leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)|\, dx \\ &\leq (b-a)\cdot\frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon\end{aligned}$$

□

5.1.2 Beispiel. Sei

$$h_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & \text{falls } x \in [0, \frac{1}{n}], \\ 2n - n^2 x, & \text{falls } x \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}], \\ 0, & \text{falls } x \in [\frac{2}{n}, 1]. \end{cases}$$

Dann konvergiert $(h_n)_{n\geq 0}$ punktweise gegen 0, jedoch nicht gleichmäßig. Es gilt

$$1 = \lim_{n\to\infty} \int_{n=0}^{1} h_n(x)\,dx \neq \int_{n=0}^{1} \lim_{n\to\infty} h_n(x)\,dx = \int_{n=0}^{1} 0\,dx = 0.$$

Alle Sätze übertragen sich auf Reihen.

5.1.3 Satz. *Konvergiert die Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ *stetiger Funktionen* f_k *auf* I *gleichmäßig gegen* f*, dann ist*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$$

stetig und für alle $a, b \in I$ *gilt:*

$$\int_a^b \left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \right) dx = \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_a^b f_k(x)\,dx \right) .$$

5.1.4 Folgerung. *Sei* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *eine Potenzreihe mit Konvergenzradius* R*. Dann gilt für jedes Teilintervall* $[a, b] \subset (-R, R)$

$$\int_a^b \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b \frac{a_{k-1}}{k} x^k \ .$$

Beweis. Wir wenden den Satz an auf $f_k = a_k x^k$ mit Integral $a_k \frac{1}{k+1} x^{k+1}$. □

5.2 Darstellbarkeit durch Potenzreihen und Taylorentwicklung

5.2.1 Definition. *Sei* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *eine Potenzreihe mit Konvergenzradius* $R > 0$ *und Summe* $f(x)$ *für* $|x| < R$*. Man sagt,* f *wird auf* $(-R, R)$ *durch die Potenzreihe* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *dargestellt.*

5.2.2 Satz. *Eine durch eine Potenzreihe dargestellte Funktion f ist im offenen Konvergenzintervall $(-R,R)$, $R>0$, beliebig oft differenzierbar. Die Ableitung erhält man durch gliedweise Differentation:*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}, \\ f''(x) &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

etc. Die abgeleiteten Reihen haben alle den Konvergenzradius R.

Beweis. Das ist Satz 3.2.14. Der entscheidende Punkt ist die Berechung des Konvergenzradius vonWir behandeln den Fall, dass er sich der Konvergenzradius von $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ mit der Formel aus Satz 2.6.7 berechnen lässt, also

$$R^{-1} = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| .$$

Dann ist der Konvergenzradius von $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)a_{k+1}}{k a_k} = R^{-1}$$

nach den Rechenregeln für Grenzwerte. □

Beispiel:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} &= \sum_{k=0}^{\infty} x^k = f(x) && |x|<1, \\ f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} &= \sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1} && |x|<1, \\ f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3} &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) x^{k-2} && |x|<1. \end{aligned}$$

5.2.3 Satz. *Für alle a,b aus dem offenen Konvergenzintervall $(-R,R)$ der Potenzreihe $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ gilt:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b a_k x^k\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}\left(b^{k+1}-a^{k+1}\right).$$

Insbesondere ist ($a = 0,\ b = x$)

$$F(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}$$

eine Stammfunktion von f *auf* $(-R, R)$, *deren Konvergenzradius* R *ist.*

Beweis. Satz 5.1.4 □

5.2.4 Beispiel. Durch Integrieren der geometrischen Reihe erhalten wir

$$-\log(1-x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} \qquad |x| < 1 \ .$$

Die Exponentialfunktion wird durch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$ dargestellt.

5.2.5 Definition. *Eine unendliche Reihe der Form*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(x-a\right)^k \tag{2.2}$$

heißt ***Potenzreihe mit Zentrum a****.*

- *Für theoretische Überlegungen reicht es* $a = 0$ *zu betrachten, denn durch Substitution* $z = x - a$ *geht die Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(x-a\right)^k$ *in die Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ *mit Zentrum in 0 über.*
- *Der* ***Konvergenzradius*** *von (2.2) ist der Konvergenzradius der entsprechenden Reihe mit Zentrum 0.*

5.2.6 Beispiel. Es gilt $e^x = e^a e^{x-a}$ und daher

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^a}{k!} \left(x-a\right)^k$$

5.2.7 Lemma. *Sei* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(x-a\right)^k$ *eine Potenzreihe mit Konvergenzradius* R. *Dann gilt:*

i) $x \in (a-R, a+R) \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(x-a\right)^k$ *konvergiert,*

$$i)\ x \notin [a-R, a+R] \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k \text{ divergiert.}$$

5.2.8 Koeffizientenvergleich**.** *Sei f auf Intervall $(a-R, a+R)$ als Potenzreihe $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k$ dargestellt. Nach Satz 5.2.2 gilt für die n-te Ableitung*

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\cdot \cdots \cdot (k-n+1)\, a_k (x-a)^{k-n} \ .$$

Setzt man $x=a$, so erhält man $f^{(n)}(a) = n! a_n$.

5.2.9 Satz (Eindeutigkeit von Potenzreihen)**.** *Sei $R > 0$ und gelte für alle $x \in (a-R, a+R)$:*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-a)^k ,$$

dann haben wir

$$a_k = b_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}, \qquad k = 0, 1, \ldots .$$

• Viel schwieriger ist die Frage, ob eine Funktion durch eine Potenzreihe dargestellt werden kann. Etwas weniger ehrgeizig versuchen wir,eine hinreichend oft differenzierbare Funktion durch Polynome zu approximieren. Die Approximation durch ein lineares Polynom hatte uns gerade auf den Ableitungsbegriff geführt.

5.2.10 Satz (Taylorformel)**.** *Für jede auf dem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion f und $a, x \in I$ gilt:*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + R_{n+1}(x,a) ,$$

wobei

$$T_n(x,a) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

*das **Taylor-Polynom** ist und das **Restglied** $R_{n+1}(x,a)$ die Darstellungen*

$$R_{n+1}(x,a) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n\, f^{(n+1)}(t)\, dt\,,$$

$$R_{n+1}(x,a) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x-a)^{n+1}\,, \quad \xi \text{ zwischen } x \text{ und } a,$$

hat.

Beweis. Nach Definition von Stammfunktionen gilt

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\, dt$$

Dies ist die behauptete Formel im Fall $n = 0$.
Wir führen nun eine partielle Integration mit $u = t - x$, $v = f'$ aus und erhalten

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \int_a^x u' f'\, dt \\ &= f(a) + (t-x)\, f'(x)\big|_a^x - \int_a^x (t-x)\, f''(t)\, dt \\ &= f(a) + f'(a)\,(x-a) + \int_a^x (x-t)\, f''(t)\, dt \end{aligned}$$

Dies ist die Formel für $n = 1$. Wiederholung des Argumentes liefert die Formel für jedes n.
Die zweite Darstellung des Restgliedes R_{n+1} erhalten wir duch den Mittelwertsatz der Integralrechnung 4.1.8:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n\, f^{(n+1)}(t)\, dt &= \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi) \int_a^x (x-t)^n\, dt \\ &= \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)\,(x-a)^{n+1} \end{aligned}$$

wobei ξ ein geeignetes Element von $[a, x]$ ist. $\square$

- Das Taylorpolynom $T_n(x,a)$ ist in Umgebung von a sehr gute Approximation

$$\begin{aligned} T_n(a,a) &= f(a) && \text{gleiche Funtionswert} \\ T_n'(a,a) &= f`(a) && \text{gleiche Anstieg} \\ T_n''(a,a) &= f''(a) && \text{gleiche Krümmung} \\ &\text{usw.} \end{aligned}$$

- Der Fehler

$$|f(x) - T_n(x,a)| = |R_{n+1}(x,a)|$$

kann genau abgeschätzt werden, z.B. auf dem Intervall $[a-R, a+R]$ durch

$$\sup_{[a-R,a+R]} \left|f^{(n+1)}(x)\right| \frac{R^{n+1}}{(n+1)!}$$

5.2.11 Beispiel. Sei $f(x) = \sin x$, $a = 0$. Dann gilt

$$f'(x) = \cos x, f^{(2)}(x) = -\sin x, f^{(3)}(x) = -\cos x, f^{(4)}(x) = \sin x$$

und daher

$$f'(0) = 0, f^{(2)}(0) = 1, f^{(3)}(x) = 0, f^{(4)} = -1 \ .$$

Es gilt also nach der Taylorformel

$$\sin x = 0 + x + 0x^2 - \frac{1}{3!}x^k + \frac{\sin \xi}{4!}x^4$$

mit der Abschätzung

$$|R_4(x,0)| \leq \frac{1}{4!}|x|^4 \ .$$

Allgemeiner:

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1} + R_{2n+2}$$

wobei

$$|R_{2n+2}| \leq \frac{1}{(2n+2)!} x^{2n+2} \ .$$

5.2.12 Satz. *Ist die Funktion f auf dem Intervall I n-mal stetig differenzierbar und $a \in I$ mit*

$$f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0, \quad f^{(n)}(a) \neq 0,$$

dann gilt:

i) *a Extremstelle $\Leftrightarrow$ n gerade,*

ii) *n gerade, $f^{(n)}(a) < 0$ $\Rightarrow$ lokales Maximum,*
n gerade, $f^{(n)}(a) > 0$ $\Rightarrow$ lokales Minimum.

Beweis. Unter unseren Voraussetzungen besagt die Taylorformel

$$f(x) - f(a) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)^n$$

für ein $\xi \in [a, x]$.
Ist n ungerade, so hat $f(x) - f(a)$ für $x > a$, $x < a$ verschiedene Vorzeichen, und f hat in a kein Extremum.
Ist n gerade, so hat $f(x) - f(a)$ für $x > a$, $x < a$ gleiche Vorzeichen, und f hat in a ein Extremum. Wir betrachten $x > a$, $f^{(n)}(a) < 0$. Dann ist $f^{(n)}(\xi) < 0$ für x (und damit ξ) nahe bei a. Es folgt $f(x) - f(a) < 0$. Damit hat f in a ein Maximum. Der andere Fall folgt analog. □

5.2.13 Definition. *Sei f auf dem offenen Intervall I beliebig oft differenzierbar und sei $a \in I$. Die unendliche Reihe*

$$T_f(x, a) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

*heißt **Taylor-Reihe** mit Zentrum a. Gilt für alle $x \in (a-R, a+R)$ die Gleichung $f(x) = T_f(x, a)$, so sagt man, dass sich f **um** a **als Taylor-Reihe entwickeln lässt**.*

- Wenn f durch eine Potenzreihe darstellbar ist, dann lässt es sich wegen Satz 5.2.9 als Taylorreihe entwickleln.
- Auch wenn f unendlich oft differenzierbar ist, so ist es nicht immer/oftnicht/meist nicht als Taylorreihe entwickelbar!

5.2.14 Beispiel. Wir betrachten $f(x) = \exp(-\frac{1}{x^2})$. Die Funktion lässt sich durch 0 zu einer stetigen Funktion auf $\mathbb{R}$ fortsetzen. Die Ableitungen von f haben alle die Form $P(x)f(x)$, wobei P eine rationale Funktion ist, z.B.

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} f, f'' = \frac{-6}{x^4} f + \frac{2}{x^3} f' \ .$$

Wegen $\lim_{x \to 0} P(x)f(x) = 0$ ist f dann auch in 0 unendlich oft differenzierbar mit $f^{(n)}(0) = 0$. Es ist also

$$T_f(x, 0) = 0 \neq f \ .$$

5.2.15 Satz. *Sei f auf dem Intervall I beliebig oft differenzierbar und sei $a \in I$. Dann konvergiert die Taylor-Reihe $T_f(x, a)$ genau für diejenigen $x \in I$ gegen $f(x)$, für die das Restglied $R_n(x, a)$ mit $n \to \infty$ gegen 0 strebt. Eine hinreichende Bedingung dafür ist, dass es Konstanten A, B gibt mit*

$$\left| f^{(n)}(x) \right| \leq A\, B^n \qquad \forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N} \, .$$

Beweis. Nach der Taylorformel 5.2.10 gilt

$$f(x) - T_n(x, a) = R_{n+1}(x, a)$$

wobei $T_n(x, a)$ die n-te Partialsumme von $T_\varphi(x, a)$ ist
d.h.

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} T_n(x, a) \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{n \to \infty} R_{n+1}(x, a) = 0$$

Sei nun

$$\left| f^{(n)}(x) \right| \leq A \cdot B^n \qquad \forall x \in I, \forall n \ .$$

Es folgt

$$|R_n(x, a)| = \left| \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} (x - a)^n \right| \leq A \frac{B^n}{n!} \cdot |x - a|^n \ .$$

Da die Reihe

$$\sum \frac{B^n \, |x - a|^n}{n!}$$

konvergiert, ist $A \frac{B^n}{n!} \cdot |x - a|^n$ eine Nullfolge. □

5.2.16 Methoden der Reihenentwicklung**.**

*1) **Die Taylor-Formel***

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + R_{n+1}(x,a)$$

mit dem Nachweis, dass $R_n(x,a) \to 0$, liefert, dass die Taylor-Reihe gegen $f(x)$ konvergiert.

*2) Bekannte **Reihen differenzieren oder integrieren**. Die Sätze 5.2.2 und 5.2.3 ermöglichen es, durch gliedweise Differentiation und Integration bekannter Reihen neue Reihenentwicklung zu erhalten (siehe Satz 5.2.17).*

*3) **Summe und/oder Produkt bekannter Reihen liefert neue Reihenentwicklungen.** Die Definition von $\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ und $\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ zusammen mit der Reihenentwicklung für e^x liefert:*

$$\begin{aligned} \cosh(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}, && x \in \mathbb{R}, \\ \sinh(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, && x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

*4) **Potenzreihen in einander einsetzen***
Sei $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, $\quad g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$. Wenn man die Potenzen nach dem Cauchy-Produkt (Satz 2.5.16) berechnet, d.h.

$$g(x)^k = \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right)^k =: \sum_{n=0}^{\infty} b_{kn} x^n \,,$$

dann erhält man

$$f(g(x)) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_{kn} x^n \right).$$

Dies, nach steigenden x Potenzen geordnet, gibt

$$f\big(g(x)\big) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_{kn} \right) x^n.$$

Die Reihenentwicklung von e^{e^x} *erhalten wir mit* $f(x) = g(x) = \exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$. *Es ist*

$$(g(x))^k = (e^x)^k = e^{kx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n x^n}{n!}$$

und damit

$$\begin{aligned} e^{e^x} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n x^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!} \right) \frac{x^n}{n!} \\ &= e + xe + \frac{x^2}{2} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{k!} \right) + \cdots \end{aligned}$$

5.2.17 Satz. *Wir haben folgende Potenzreihendarstellungen:*

a) $$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k, \qquad x \in \mathbb{R},$$

b) $$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

c) $$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

d) $$\sinh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

e) $$\cosh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{}{(2k)!} x^{2k}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

f) $$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1}, \qquad |x| < 1,$$

g) $$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}, \qquad |x| < 1.$$

Beweis. a) war unsere Definition.
b) war Beispiel 5.2.11, c) durch differenzieren.
d) e) (siehe oben) aus der Reihenentwicklung von e^x.

f) folgt durch die Substition von $-x$ in dergeometrischen Reihe, gefolgt von Integration.
g) Wir benutzen

$$\arctan x = \int_{y=0}^{x} \frac{dy}{1+y^2}$$

Der Integrand ist die geometrische Reihe

$$\frac{1}{1+y^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k y^{2k}$$

die termweise integriert wird. □

5.2.18 Satz. *Für alle x mit $|x| < 1$ und alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt:*

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k\,,$$

wobei

$$\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot \cdots \cdot (\alpha-k+1)}{k!}$$

Beweis. Sei $g(x)$ die rechte Seite. Wir berechnen den Konvergenzradius mit der Quotientenformel $R^{-1} = \lim |a_{k+1}/a_k|$ und erhalten wegen

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot \cdots \cdot (\alpha-(k+1)+1)k!}{(k+1)!\alpha(\alpha-1)\cdot \cdots \cdot (\alpha-k+1)} = \lim_{k\to\infty} \frac{\alpha-k}{k+1} \to -1$$

den Konvergenzradius 1.
Sei nun $-1 < x < 1$. Es folgt

$$\begin{aligned}
g(x) &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots \\
g'(x) &= \alpha + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1\cdot 2!}2x + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{2!}x^2 + \cdots \\
xg'(x) &= \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1!}x^2 + \cdots \\
g'(x)(1+x) &= \alpha + \alpha x(\alpha-1+1) + \alpha(\alpha-1)\left(\tfrac{\alpha-2}{2}+1\right)x^2 + \cdots \\
&= \alpha\left(1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots\right) \\
&= \alpha g(x)
\end{aligned}$$

Hieraus folgt dann für

$$\begin{aligned}
h(x) &:= \frac{g(x)}{(1+x)^{\alpha}} \\
h'(x) &= \frac{g'(x)\,(1+x)^{\alpha} - g(x)\alpha\,(1+x)^{\alpha-1}}{(1+x)^{2\alpha}} \\
&= \frac{(1+x)^{\alpha-1}\left[g'(x)(1+x) - g(x)\alpha\right]}{(1+x)^{2\alpha}} = 0
\end{aligned}$$

Die Funktion h ist also konstant. Im Punkt 0 gilt $h(0) = g(0) = 1$, also

$$1 = \frac{g(x)}{(1+x)^{\alpha}} \ .$$

$\square$

- Die Formel aus Satz 5.2.18 enthält als Spezialfälle:

1) $\alpha = n \in \mathbb{N}$

$$\binom{\alpha}{k} = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdot \cdots \cdot (n-k+1)}{k!} = 0 \qquad \text{falls } n < k$$

$$\Rightarrow \quad (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \qquad \text{(klassische binomische Formel)}$$

2) $\alpha = \frac{1}{2}$

$$\binom{\frac{1}{2}}{0} = 1, \qquad \binom{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}, \qquad \binom{\frac{1}{2}}{2} = -\frac{1}{8},$$

$$\binom{\frac{1}{2}}{k} = (-1)^{k-1} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \cdots \cdot (2k-3)}{2\cdot 4\cdot \cdots \cdot (2k)}, \quad k \geq 2$$

$$\Rightarrow \qquad \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 \pm \cdots, \tag{2.4}$$

falls $|x| < 1$.

3) $\alpha = -\frac{1}{2}$

$$\binom{-\frac{1}{2}}{0} = 1, \quad \binom{-\frac{1}{2}}{k} = (-1)^k \frac{1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot (2k)}, \quad k \geq 1$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 \pm \cdots, \tag{2.5}$$

falls $|x| < 1$.

• Die Taylorentwicklung hat viele verschieden Anwendungen.

5.2.19 Grenzwertberechnung**.** *Durch Einsetzen der Reihenentwicklung der entsprechenden Funktion erhält man eine rationale Funktion in x deren Grenzwert einfacher zu berechnen ist. Diese Methode ist eine Alternative zur Regel von de l'Hospital, wenn man die Reihen kennt.*

5.2.20 Beispiel. Wir bestimmen

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \ln(1-x)}{\sin^2 x}$$

Nach Satz 5.2.17 gilt

$$\begin{aligned}
\ln(1-x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(-1)^{k+1}}{k+1} x^{k+1} \\
&= -\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots\right) \\
\sin x &= \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= x - \frac{x^3}{3!} + \cdots \\
\frac{x \ln(1-x)}{\sin^2 x} &= \frac{-x\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots\right)}{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)\left(x - \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)} \\
&= \frac{-\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3}\right)}{1 - \frac{2x^2}{3!} + \cdots} \quad \to -1 \qquad x \to 0
\end{aligned}$$

5.2.21 Näherungsformeln**.** *In komplizierten, funktionalen Zusammenhängen kann man durch Einsetzen der Reihenentwicklung die „dominanten“ Terme bestimmen.*

5.2.22 Berechnung nicht elementar integrierbarer Integrale**.** *Einige Integrale besitzen keine in geschlossener Form darstellbare Stammfunktion. Durch die Reihendarstellung des Integranden erhält man oft eine Darstellung des Integrals als unendliche Reihe.*

5.2.23 Beispiel.

$$F(\varphi, k) = \int_{t=0}^{\varphi} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}} \qquad 0 \le k^2 < 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^4 + \cdots$$

$$\int_{t=0}^{\varphi} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}}\, dt = \int_{t=0}^{\varphi} 1 + \frac{\sin^2 t k^2}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} k^4 \sin^4 t + \cdots$$

$$= \varphi + \frac{k^2}{2} \int_{t=0}^{\varphi} \sin^2 t\, dt + \frac{3k^4}{8} \int_{t=0}^{\varphi} \sin^4 t\, dt + \cdots$$

Für konkrete Werte k, φ kann nun $F(\varphi, k)$ beliebig genau berechnet werden.

5.3 Fourier–Reihen

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$) P–periodisch, d.h. $\forall x \in \mathbb{R} : f(x+P) = f(x)$. Dabei ist P eine feste, positive reelle Zahl, die **Periode**. Da mit P auch kP ($k \in \mathbb{N}$) Periode zu f ist, wird, falls f nicht konstant ist, als P meist die kleinste Periode genommen.

Die einfachsten P periodischen Funktionen sind $\cos(2\pi/Pnx)$ und $\sin(2\pi/Pnx)$ mit $n \in \mathbb{N}_0$.

5.3.1 Definition. $P > 0$. *Sei* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *(oder* $R \to \mathbb{C}$*) stückweise stetig und* P*–periodisch.*

1. *Die Zahlen*

$$a_n = \frac{2}{P} \int_0^P f(x) \cos\left(\frac{2\pi}{P}\, nx\right) dx \quad (n \in \mathbb{N}_0),$$

$$b_n = \frac{2}{P} \int_0^P f(x) \sin\left(\frac{2\pi}{P}\, nx\right) dx \quad (n \in \mathbb{N})$$

heißen die ***Fourier–Koeffizienten*** *zu f. Ist insbesondere $P = 2\pi$, dann haben die Fourier–Koeffizienten die Gestalt*

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx)\, dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx)\, dx$$

2. *Die Reihe*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2\pi}{P}\, nx\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi}{P}\, nx\right)\right)$$

heißt die ***Fourier–Reihe*** *zu f.*

5.3.2 Satz. *Sei f P–periodisch und beliebig oft differenzierbar. Dann konvergiert die Fourier–Reihe zu f gleichmäßig gegen f. Die Darstellung als Fourierreihe ist eindeutig.*

Beweis. Wir behandeln nur die Eindeutigkeit. Sei $P = 2\pi$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)\ .$$

Dann gilt für die Fourier-Koeffizienten nach Satz 5.1.3 (Vertausch von Summe und Integral) und den Orthogonalitätsrelationen 4.2.8

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)dx &= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\cos(kx)+\sum_{k=1}^{\infty} b_k\sin(kx)\right)\sin(nx)dx\\
&= \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} a_k\int_0^{2\pi}\cos(kx)\sin(nx)+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} b_k\int_0^{2\pi}\sin(kx)\sin(nx)\\
&= \frac{1}{\pi}\pi a_n = a_n\ .
\end{aligned}$$

Wie in Fall der Taylorreihen folgt hieraus die Eindeutigkeit. □

5.3.3. *Die Voraussetzung kann abgeschwächt werden: Es genügt, dass I in Teilintervalle zerlegt werden kann, auf denen die Funktion beschränkt und beliebig oft differenzierbar ist. In den Unstetigkeitsstellen konvergiert die Fourierreihe (punktweise Konvergenz) dann gegen das arithmetische Mittel des links- und rechtsseitigen Grenzwertes.*

5.3.4 Beispiel. Sei f periodisch mit Periode 2π gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } \ 0 \le x < \pi,\\ -1 & \text{für } \ -\pi \le x < 0.\end{cases}$$

f ist ungerade. Dann verschwinden alle a_n.

$$b_n = \begin{cases} \frac{4}{\pi n}\,, & n \ \text{ ungerade,}\\ 0\,, & n \ \text{ gerade.}\end{cases}$$

Die Fourierreihe ist also

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{4}{\pi(2n+1)}\sin((2n+1)x)\ .$$

5.3.5 Beispiel. Wir betrachten die 2π-periodische Sägezahnfunktion

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}+x & \text{für } \ 0 \le x \le \pi\\ -\frac{\pi}{2}-x & \text{für } \ -\pi \le x \le 0\end{cases}$$

und erhalten die Fourierreihe

$$f(x) = -\frac{4}{\pi}\Big(\cos x+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\dots\Big).$$

Kapitel 6

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Literatur: Meyberg, Vachenauer: Höhere Mathematik II, Kapitel 9.

6.1 Allgemeines

Viele physikalische Zusammenhänge stellen einen Zusammenhang her zwischen einer Größe und ihrer Veränderung. Wir nennen dies eine Differentialgleichung. **Gewöhnliche Differentialgleichungen** hängen von einer reellen Variablen ab. Differentialgleichungen in mehreren Variablen heißen **partielle Differentialgleichungen** (da in ihnen partielle Ableitungen vorkommen).

6.1.1 Definition. *Sei $n \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}^{n+2}$, $F : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion.*

1. *Ein Bestimmungsgleichung für $y = y(x)$ der Form*

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{1.1}$$

   in der Variablen x und der gesuchten Funktion y und deren Ableitungen bis zur Ordnung n auftreten, heißt **gewöhnliche Differentialgleichung n-ter Ordnung**.

2. *Eine n-mal differenzierbare Funktion $y : I \to \mathbb{R}$ heißt* **Lösung** *von (1.1), wenn für alle $x \in I$ gilt*

$$(x, y(x), \ldots, y^{(n)}(x)) \in D$$
$$F(x, y(x), \ldots, y^{(n)}(x) = 0$$

6.1.2 Beispiel. $y' - xy^2 = 0$ ist eine Differentialgleichung 1. Ordnung. Es gilt $F(x_1, x_2, x_3) = x_3^2 - x_1 x_2^2$ auf $D = \mathbb{R}^3$. Meist schreiben wir

$$y' = xy^2 \ .$$

Eine Lösung auf $I = \mathbb{R}$ ist

$$y(x) = \frac{-2}{1+x^2}$$

denn

$$y'(x) = (-2)(-1)(1+x^2)^{-2}(2x) = x\frac{4}{(1+x^2)^2} = xy^2 \ .$$

6.1.3 Beispiel.

$$y' = y$$

hat die Lösung $y(x) = c\exp(x)$ für jedes $c \in \mathbb{R}$.

6.1.4 Beispiel. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Die Differentialgleichung

$$y' = f$$

hat als Lösung die Stammfunktion F von f. Jede weitere Lösung hat dann die Form $F + c$ für $c \in \mathbb{R}$.

$$y'' = f$$

hat als allgemeine Lösung $\int F + cx + d$, wobei $c, d \in \mathbb{R}$ beliebig.

Wie wir in den Beispielen sehen, legt die Differentialgleichung die Funktion nicht eindeutig fest. Für eine Gleichung der Ordnung n benötigen wir im allgemeinen n Bedingungen.

6.1.5 Definition.

1. *Ein* **Anfangswertproblem** *in x_0 ist eine Differentialgleichung*

   $$y^{(n)} = F(x, y, \dots, y^{(n-1)})$$

   zusammen mit der Vorgabe

   $$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1}(x_0) = y_{n-1}$$

   wobei $(x_0, y_0, \dots, y_{n-1})$ im Definitionsbereich von F liegt.

2. *Das Anfangswertproblem heißt* **lokal lösbar**, *wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass auf $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ eine Lösung $y = y(x)$ der DGL existiert mit den vorgegebenen Anfangsbedingungen existiert. Dieses $y(x)$ heißt* **lokale Lösung**.

6.1.6 Beispiel. Das Anfangswertproblem

$$y' = 1 + y^2, x(0) = 0$$

wird von $y = \tan x$ gelöst, da $\tan' = \frac{1}{\cos^2}$. Die Lösung ist nur $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ definiert, obwohl die DGL auf ganz $\mathbb{R}$ erklärt ist.

• Ein Anfangswertproblem heißt **sachgemäß gestellt**, wenn folgende Eigenschaften gesichert sind:

1. Die Existenz der lokalen Lösung
2. Die Eindeutigkeit der lokalen Lösung
3. Die stetige Abhängigkeit der lokalen Lösung von den Anfangswerten

(Die letzte Bedingung stellt sicher, dass das Ergebnis physikalisch relevant ist, d.h. stabil unter kleinen Störungen der Anfangswerte, die immer nur näherungsweise bekannt sind.) Für ein solches Problem stellen sich sofort zusätzliche Probleme:

4. die globale Existenz
5. explizite Bestimmung der Lösung

6.1.7 Beispiel. Die DGL

$$y' = 3\sqrt[3]{y^2}$$

hat als Lösungen die kubischen Parabeln $y = (x - c)^3$, aber zusätzlich noch die Funktion $y = 0$. Damit gehen durch jeden Punkt der x-Achse zwei Lösungen. Tatsächlich gibt es weitere, die durch Einkleben eines Streifens $y = 0$ zwischen 2 Parabeläste entstehen.

6.2 Lineare DGLs 1. Ordnung

Wir betrachten DGLs der Form

$$y' + a(x)y = f(x) \tag{2.1}$$

mit auf einem Intervall erklärten Funktionen a, f. Die rechte Seite der DGL heißt **Störfunktion**. Die DGL heißt **homogen**, falls $f = 0$, anderfalls **inhomogen**. Die (2.1) **zugeordnete homogene DGL** ist

$$y' + a(x)y = 0 \ . \tag{2.2}$$

6.2.1 Satz. *Sei $a : I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist die vollständige allgemeine Lösung der homogenen DGL (2.2) gegeben durch*

$$y(x) = ce^{-A(x)} \;\; c \in \mathbb{R} \; ,$$

wobei A eine Stammfunktion von a ist.

Beweis. Sei $y(x)$ wie im Satz. Dann gilt mit Kettenregel und dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

$$y' = ce^{-A(x)}(-A') = ce^{-A(x)}(-a) = -ay \; .$$

Die Herleitung der Eindeutigkeit beruht auf dem Verfahren der **Trennung der Variablen**:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = -a(x)y \Leftrightarrow & \frac{dy}{y} = -a(x)dx \\ & \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int -a(x)dx \\ & \Rightarrow \ln(y) = -A(x) + c \\ & \Rightarrow y = exp(-A(x) + c) = e^c e^{-A(x)} \end{aligned}$$

□

6.2.2 Beispiel. Sei $a(t) = a$ konstant. Dann hat das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = ax, x(t_0) = x_0$$

die eindeutige Lösung

$$x(t) = x_0 e^{a(t-t_0)} \; .$$

Diese Differentialgleichung tritt häufig auf, etwa bei radioaktiven Zerfall oder beim Wärmetransport.

6.2.3 Satz. *Seien $a, f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann hat die inhomogene lineare DGL (2.1) die vollständige allgemeine Lösung*

$$y(x) = e^{-A(x)} \left(\int_{x_0}^{x} e^{A(\xi)} f(\xi) d\xi + c \right)$$

mit $c \in \mathbb{R}$, wobei $A(x) = \int\limits_{x_0}^{x} a(\xi) d\xi$ Stammfunktion von A und $x_0 \in I$ fest.

Beweis. Das angewendete Verfahren heißt **Variation der Konstanten**. Sei y_h eine Lösung der zugehörigen homogenen DGL. Wir machen den Ansatz

$$y(x) = c(x)y_h(x) \ .$$

Eingesetzt in (2.2) ergibt

$$\begin{aligned} f(x) &= y' + a(x)y(x) \\ &= c'(x)y_h(x) + c(x)y_h'(x) + a(x)c(x)y_h(x) \\ &= c'(x)y_h(x) \ . \end{aligned}$$

da y_h die homogene Gleichung löst. Es folgt

$$c'(x) = \frac{f(x)}{y_h(x)} \Rightarrow c(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{f(\xi)}{y_h(\xi)} d\xi + c \ .$$

Nun setzen wir $y_h(x) = exp(-A(x))$ ein und erhalten die behauptete Formel. □

- Für jeden beliebigen Anfangswert $y_0 = y(x_0)$ ist das Anfangswerproblem zur inhomogenen linearen DGL 1. Ordnung (2.1) eindeutig und global auf I lösbar.
- Die vollständige allgemeine Lösung der inhomogenen DGL hat die Form

  $$y(x) = y_p(x) + y_h(x)$$

  wobei $y_h(x)$ die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen DGL ist und y_p eine Lösung der inhomogenen.

  Beweis. Die Differenz zweier Lösungen der inhomogenen DGL erfüllt die homogene. □

- **Superpositionsprinzip** Wir betrachten Lösungen von

  $$y_1' + a(x)y - 1 = f_1(x), y_2' + a(x)y = f_2(x)$$

  Für jedes $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist dann $y = \alpha y_1 + \beta y_2$ eine Lösung von

  $$y' + a(x)y = \alpha f_1 + \beta f_2 \ .$$

6.2.4 Beispiel. Wir betrachten

$$y' + \frac{1}{x} y = x^3 \ .$$

Es gilt $A(x) = \ln x$, und $y_h(x) = ce^{-\ln x} = c\frac{1}{x}$ löst die zugehörige homogene DGL. Der Ansatz (Variation der Konstanten)

$$y = c(x)\frac{1}{x}$$

führt auf

$$\begin{aligned} x^3 &= c'(x)\frac{1}{x} - c(x)\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}c(x)\frac{1}{x} \Rightarrow \\ c'(x) = x^4 &\Rightarrow c(x) = \frac{1}{5}x^5 + C \\ y &= \frac{1}{5}x^4 + \frac{C}{x} \end{aligned}$$

• **Integration durch Substitution** Durch Übergang zu neuen Variablen wird die gegebene DGL in eine bekannte Form gebracht.

6.2.5 Beispiel. Die Bernoulli-Differentialgleichung

$$y' + a(x)y = b(x)y^\alpha$$

$\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0, 1$ und stetigen Funktionen a, b. Wir substituieren

$$\eta(x) = y(x)^{1-\alpha}$$

überführt die DGL in die Form

$$\eta' + (1-\alpha)a(x)\eta = (1-\alpha)b(x) \ .$$

Beweis. Wir setzen $\eta' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$ und η ein und erhalten

$$(1-\alpha)y^{-\alpha}y' + (1-\alpha)a(x)y(x)^{1-\alpha} = (1-\alpha)b(x)$$

Dies unterscheidet sich von der ursprünglichen Gleichung um den Faktor $(1-\alpha)y^{-\alpha}$. □

Die lineare Gleichung für η ist lösbar. Durch die Rücksubstitution

$$y(x) = \eta(x)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

wird die ursprüngliche Gleichung gelöst.

Die Differentialgleichung tritt auf als Bewegungsgleichung eines Pendels mit Luftreibung.

6.3 Existenz und Eindeutigkeit der Lösung

Wir betrachten DGLs 1. Ordnung

$$y' = f(x, y)$$

mit $f : G \to \mathbb{R}^2$, wobei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein offenes Rechteck $I \times J$.

6.3.1 Satz. *Sei $G = I \times J \subset \mathbb{R}^2$ ein offenes Rechteck, $f : G \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar in jeder der beiden Variablen. Dann gibt es zu jeden $(x_0, y_0) \in G$ für das Anfangswertproblem*

$$y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$$

eine eindeutige Lösung $y = y(x)$, die sich beidseitig bis an den Rand von G erstreckt.

• Die Voraussetzung ist viel zu stark. Eine bessere Formulierung benötigt aber die Sprache der mehrdimensionalen Analysis, die uns noch nicht zur Verfügung steht. G kann ersetzt werden durch eine offene, zusammenhängende Teilmenge des $\mathbb{R}^2$. (Eine Teilmenge heißt zusammenhängend, wenn je zwei Punkte durch einen Weg verbunden werden können.)

6.3.2 Beispiel. Wir gehen zurück zu Beispiel 6.1.7

$$y' = 2\sqrt[3]{y^2}$$

d.h. $f(x, y) = \sqrt[3]{y^2}$. Die Ableitung nach y ist

$$\frac{df}{dy} = \frac{2}{3} y^{-\frac{1}{3}}$$

und in $(x, y) = (x, 0)$ nicht wohldefiniert. Die Voraussetzung des Satzes ist nicht erfüllt.

Der Existenz- und Eindeutigkeitssatz wird oft als Satz von Picard-Lindelöf zitiert, deren Beweis eine explizite Lösungsmethode liefert.

• **Die Picard-Iteration** Wir setzen $y_0(x) = y_0$ und bilden iterativ für $n \in \mathbb{N}$

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}) dt \ .$$

Dies ist eine Folge von Funktionen. Man beweist mit Hilfe eines Fixpunktsatzes wie 3.3.16, dass die Folge auf einem kleinen Intervall gleichmäßig konvergiert. Sei

$$y = \lim_{n\to\infty} y_n$$

die Grenzfunktion. Diese erfüllt dann

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,y)dt \Rightarrow y' = f(x,y), y(x_0) = y_0 \ .$$

• Mit Hilfe von numerischer Integration wird hieraus auch ein numerisches Verfahren zur Integration von Differentialgleichungen.

6.3.3 Beispiel. Wir betrachten $y' = xy, y(0) = 1$. Picard-Iteration liefert

$$y_0(x) = 1$$

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x t y_0(t)dt = 1 + \frac{x^2}{2}$$

$$y_2(x) = y_1(x) = 1 + \int_0^x t y_1(t)dt = 1 + \int_0^x \left(t + \frac{t^3}{2}\right) dt = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8}$$

$$y_2(x) = y_1(x) = 1 + \int_0^x t y_1(t)dt = 1 + \int_0^x \left(t + \frac{t^3}{2} + \frac{t^5}{8}\right) dt = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + \frac{x^6}{48}$$

Induktiv erhält man

$$y_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{2^k k!} \ .$$

Diese Folge konvergiert gegen $\exp^{\frac{1}{2}x^2}$.

6.4 Potenzreihenansatz

Wir betrachten eine DGL der Form

$$F(x, y, \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{4.1}$$

wobei F durch eine konvergente Potenzreihe (z.B. ein Polynom) gegeben sein soll. Wir setzen an

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

und erhalten Formeln für die Ableitungen. Dann geht man wie folgt vor:

1. Den Ansatz und die Ableitung in die Gleichung (4.1) einsetzen.
2. Wir rechnen und sortieren nach Potenzen von x.
3. Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir ein unendliches System von Gleichungen für die Koeffizienten a_k.
4. Mit den Lösungen bestimmen wir den Konvergenzradius.

Im Konvergenzbereich von y (abhängig auch vom Konvergenzbereich von F) erhalten wir eine Lösung der Gleichung.

6.4.1 Beispiel. Die Laguerre-DGL

$$xy'' + (1-x)y' + my = 0 \quad m \in \mathbb{R}$$

Wir machen den Ansatz

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \\ y'(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1} \\ y''(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} \end{aligned}$$

und erhalten die Gleichung

$$\begin{aligned} 0 = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1} - \sum_{k=0} \infty k a_k x^k + m \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \\ = \sum_{l=0}^{\infty} [((l+1)(l+1))a_{l+1} + (m-l)a_l] x^l \end{aligned}$$

d.h. für jedes $l \geq 0$ muss gelten

$$(l+1)^2 a_{l+1} + (m-l)a_l \Rightarrow a_{l+1} = \frac{l-m}{(l+1)^2} a_l \ .$$

Mit frei gewähltem a_0 ergibt sich

$$\begin{aligned}
a_1 &= -ma_0 \\
a_2 &= -\frac{m-1}{2^2}a_1 = \frac{m(m-1)}{2^2}a_0 = \binom{m}{2}\frac{a_0}{2} \\
a_3 &= -\frac{m-2}{3^2}a_2 = -\binom{m}{3}\frac{a_0}{2\cdot 3} \\
a_n &= (-1)^n\binom{m}{n}\frac{a_0}{n!} \\
y(x) &= a_0\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{m}{n}\frac{1}{n!}x^n \ .
\end{aligned}$$

Diese Reihe konvergiert für jedes $x \in \mathbb{R}$ (Vergleich mit der binomischen Reihe 5.2.18).
Speziell für $m \in \mathbb{N}$ bricht die Reihe bei $n = m$ ab. Für $a_0 = 1$ erhält man das **Laguerre-Polynom** $L_m(x)$ vom Grand m. Es gilt

$$L_m(x) = \frac{e^x}{m!}\frac{d^m}{dx^m}(x^m e^{-x})$$

$$\int_0^{\infty} L_n(x)L_m(x)e^{-x}dx = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \ . \end{cases}$$

Gewichtet mit e^{-x} bilden die Laguerre-Polynome eine orthogonale Schar von Polynomen (vergleiche die Schar $\sin(nx), \cos(mx)$).

6.4.2 Lemma. *Für Gleichungen zweiten Grades der Form*

$$p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = 0 \tag{4.2}$$

führt der Potenzreihenansatz um x_0 zu einer nichttrivialen Lösung, wenn

$$\frac{q(x)}{p(x)}, \frac{r(x)}{p(x)}$$

um $x = x_0$ in Taylor-Reihen entwickelt werden können.

6.4.3 Beispiel. Die Legendre-Differentialgleichung

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + m(m+1)y = 0 \qquad m \in \mathbb{R} \tag{4.3}$$

Um $x = 0$ lassen sich die Koeffizienten in eine Reihe mit Konvergenzradius 1 entwickeln, denn

$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}.$$

Der Ansatz $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ führt auf die Gleichung

$$\begin{aligned}
0 &= (1-x^2)\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 2x\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} + m(m+1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty}(-n(n-1) - 2n + m(m+1))a_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2} + (-n(n-1) - 2n + m(m+1))a_n]x^n \ .
\end{aligned}$$

Dies führt zur Rekursionsgleichung

$$\begin{aligned}
(n+2)(n+1)a_{n+2} &= [n(n-1) + 2n - m(m+1)]a_n \\
&= [n(n+1) - m(m+1)]a_n \\
&= [-(m-n)(m+n+1)]a_n
\end{aligned}$$

mit frei wählbarem $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$. Hieraus folgt zunächst $(n = 2k-2, 2k-1)$

$$\begin{aligned}
a_{2k} &= a_{2k-2}\frac{-(m-2k+2))(m+2k-1)}{(2k)(2k-1)} \\
a_{2k+1} &= a_{2k-1}\frac{-(m-2k+1)(m+2k)}{(2k+1)(2k)}
\end{aligned}$$

und mit vollständiger Induktion

$$\begin{aligned}
a_{2k} &= \frac{(-1)^k}{(2k)!}\prod_{l=1}^{k}(m-2(l-1))(m+2l-1)a_0 \\
a_{2k+1} &= \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\prod_{l=1}^{k}(m-(2l-1))(m+2l)a_1
\end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung hat also die Form

$$y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x)$$

mit

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \prod_{l=1}^{k} (m - 2(l-1)))(m + 2l - 1)x^{2k}$$
$$y_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \prod_{l=1}^{k} (m - 2(l-1)))(m + 2l)x^{2k+1}$$

Man sieht mit dem Quotientenkriterium, dass wegen

$$\left|\frac{a_{2k+2}}{a_{2k}}\right| = \left|\frac{1}{(2k+1)(2k+2)}(m - 2(k+1-1))(m + 2(k+1) - 1)\right| \xrightarrow{k\to\infty} 1$$

die Reihe y_1 den Konvergenzradius 1 hat, analog für y_2.

Sei nun speziell $m \in \mathbb{N}$. Dann ist jeweils eine der Basislösungen y_1, y_2 ein Polynom, existiert also auf ganz $\mathbb{R}$. Die andere wird jedoch singulär in $x = 1$ oder $x = -1$.
Für $m = 0$ gilt $a_2 = 0$ und daher $y_1 = 1$, jedoch

$$y_2(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) .$$

Für $m = 1$ gilt $a_3 = 0$ und daher $y_2 = x$, jedoch

$$y_1(x) = 1 - \frac{x}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) .$$

6.4.4 Definition. *Ein Punkt x_0 heißt* **singulärer Punkt** *der Differentialgleichung (4.2), wenn $p(x_0) = 0$ gilt. Man nennt x_0 eine* **reguläre Singularität**, *wenn*

$$p(x) = (x - x_0)^2 p_0(x),\ \ q(x) = (x - x_0)p_1(x),\ \ r(x) = p_2(x)$$

mit Funktionen p_i, die um x_0 in eine Potenzreihe entwickelt werden können und in x_0 nicht verschwinden.

6.4.5 Lemma. *Hat (4.2) eine reguläre Singularität in x_0, so führt der Ansatz*

$$y(x) = (x - x_0)^r P(x)$$

zum Ziel, wenn r eine Nullstelle der **Indexgleichung**

$$r(r-1)p_0(x_0) + rp_1(x_0) + p_2(x_0)$$

und $P(x)$ eine Potenzreihe ist.

• Im Lemma ist $r \in \mathbb{R}$ beliebig!

Beweis. Wir wollen sehen, wo die Indexgleichung herkommt. Sei $x_0 = 0$. Wir machen den Ansatz

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{r+k}$$

und setzen in die Differentialgleichung ein:

$$p_0(x)\sum_{k=0}^{\infty}(r+k)(r+k-1)a_k x^{r+k} + p_1(x)\sum_{k=0}^{\infty}(r+k)a_k x^{r+k} + p_2(x)\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{r+k} = 0\ .$$

Nach Voraussetzung sind p_i Potenzreihen. Einsetzen und Ausmultiplizieren führt dann auf die gesuchten Rekursionsgleichungen. Die Indexgleichung ist genau die Bedingung, dass der Koeffizient von x^r von der Form $0a_0$ ist, also a_0 frei wählbar ist. □

Wir zeigen das Prinzip in einem wichtigen Spezialfall.

6.4.6 Beispiel. Die Besselsche Differentialgleichung

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \alpha^2)y = 0 \tag{4.4}$$

mit $p_0 = p_1 = 1, p_2 = x^2 - \alpha^2$ Die Indexgleichung lautet

$$r(r-1) + r - \alpha^2 = 0 \Rightarrow r = \pm\alpha\ .$$

Sei zunächst $\alpha = m \in \mathbb{N}$. Der Ansatz ist

$$y(x) = x^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+m}$$

und damit

$$xy' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+m)a_n x^{n+m}, x^2 y'' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+m-1)(n+m)a_n x^{n+m}\ .$$

Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty}[(n+m) + (n+m-1)(n+m) - \alpha^2]a_n x^{n+m} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+m+2}$$

und die Rekursionsgleichung

$$((n+m)^2 - m^2)a_n = \begin{cases} 0 & n = 0, 1 \\ a_{n-2} & n \geq 2 \end{cases} .$$

Hieraus folgt

$$a_0 \in \mathbb{R}, a_1 = 0, a_n = \frac{a_{n-2}}{(n+m)^2 - m^2} \Rightarrow$$
$$a_{2n-1} = 0, a_{2n} = (-1)^n \frac{a_0}{4^n n!(m+1)(m+2)\dots(m+n)} .$$

Die Reihe konvergiert auf ganz $\mathbb{R}$ und löst die Besselsche Differentialgleichung. Speziell für Die Reihe für $a_0 = 1/2^m m!$ erhält man die **Bessel-Funktion 1. Art der Ordnung** m:

$$J_m(x) = \frac{x^m}{2^m} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n n!(m+n)!} x^{2n}$$

Die Vielfachen von J_m sind noch nicht die allgemeine Lösung, denn wir erwarten bei einer Gleichung der Ordnung zwei auch zwei frei wählbare Parameter. Die zweite Basislösung hat die Form

$$Y_m(x) = cJ_m(x) \ln x + x^{-m} P_2(x) ,$$

wobei P_2 eine Potenzreihe bezeichnet. Y_m heißt **Bessel-Funktion 2. Art der Ordnung** m und ist bei 0 singulär.

6.5 Systeme von Differentialgleichungen

6.5.1 Definition. *Sei $n \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ und $F_1, \dots, F_n : D \to \mathbb{R}$ Funktionen.*

1. *Das Gleichungssystem*

$$\begin{aligned} y_1' &= F(x, y_1, \dots, y_n) \\ y_2' &= F(x, y_1, \dots, y_n) \\ &\dots \\ y_n' &= F(x, y_1, \dots, y_n) \end{aligned}$$

System von n Differentialgleichungen 1. Ordnungen. *Man kürzt oft ab $F = (F_1, \ldots, F_n)$, $y(x) = (y_1(x), \ldots, y_n(x))$ und schreibt dann*

$$y' = F(x, y) \tag{5.1}$$

für das System.

2. *Ein Tupel $y_1, \ldots, y_n : I \to \mathbb{R}$ heißt* **Lösung** *des Systems (5.1), wenn für alle $x \in I$ gilt*

$$\begin{aligned} (x, y_1(x), \ldots, y_n(x)) &\in D \\ F_1(x, y_1(x), \ldots, y_n(x)) &= 0 \\ F_2(x, y_1(x), \ldots, y_n(x)) &= 0 \\ &\ldots \\ F_n(x, y_1(x), \ldots, y_n(x)) &= 0 \end{aligned}$$

6.5.2 Satz. *Sei $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen (z.B. ein Produkt von offenen Intervallen), $F_1, \ldots, F_n$ in jeder Variablen stetig differenzierbar. Sei $(a, b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Dann gibt es $\varepsilon > 0$, so dass das System von Differentialgleichungen 1. Ordnung*

$$y' = F(x, y)$$

auf $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ eine Lösung mit

$$y(a) = b\ .$$

(d.h. $y_i(a) = b_i$). Die Lösung ist eindeutig.

Beweis. Wie im Falle einer Gleichung erster Ordnung (Satz 6.3.1) wird mit Picard-Iteration

$$y_k = b + \int_a^x F(t, y_{k-1})dt$$

eine Folge von Tupeln von Funktion definiert, die gleichmäßig konvergiert. Die Grenzfunktionen bilden dann die Lösung. □

6.5.3 Folgerung. *Sei $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ in jeder Variablen stetig differenzierbar. Sei $(a, b_0, \ldots, b_{n-1}) \in D$. Dann hat das Anfangswertproblem*

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \quad f^{(k)}(a) = b_k$$

eine lokale Lösung $y : I \to \mathbb{R}$ um a. Diese ist eindeutig.

Beweis. Wir gehen über zu einem System von lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung. Wir setzen

$$\begin{aligned} y_1 &:= y \\ y_2 &:= y' \\ \cdots \\ y_n &:= y^{(n-1)} \end{aligned}$$

und betrachten

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' & 0 y_3 \\ \dots y_{n-1}' & \qquad = y_{n-2} \\ y_n' &= f(x, y_1, \dots, y_{n-1}) \end{aligned}$$

Offensichtlich liefert jede Lösung des Systems eine Lösung des Gleichung n-ter Ordnung. Die Folgerung folgt aus dem Satz. □

6.5.4 Beispiel. Die Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y'' = -y$$

ist äquivalent zu dem System

$$y_1' = y_2, y_2' = -y_1$$

Die Lösung ist offensichtlich $y = y_1 = c_1 \sin x + c_2 \cos x$, $y_2 = c_1 \cos x - c_2 \sin x$.

Kapitel 7

Rückblick

7.1 Gegenstand der Vorlesung

Differential- und Integralrechnung einer Variablen

7.2 Wichtigster Satz

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

7.2.1 Satz (vergl. 4.1.10)**.** *Ist f eine auf dem Intervall I stetige Funktion, dann gilt:*

a) Die durch

$$F_a(x) := \int_a^x f(t)\,dt \qquad a, x \in I$$

definierte Funktion ist eine Stammfunktion von f, d.h.

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x). \tag{2.1}$$

Jede andere Stammfunktion F von f hat die Form $F(x) = F_a(x) + c, c \in \mathbb{R}$.

b) Mit einer beliebigen Stammfunktion F von f gilt:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b := F(b) - F(a). \tag{2.2}$$

Beweis. Wir bilden den Differenzenquotienten für F_a. Nach den Rechenregeln für Integrale und dem Mittelwertsatz 4.1.9 gilt

$$\begin{aligned} F_a(x+h) - F_a(x) &= \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \\ &= \int_x^{x+h} f(t)dt \\ &= f(\xi_h)h \end{aligned}$$

mit $\xi_h \in [x, x+h]$. Mit $h \to 0$ gilt $\xi_h \to x$. Da f stetig ist, folgt

$$F_a'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(\xi_h) = f(x) \ .$$

Ist F eine andere Stammfunktion, so gilt

$$(F - F_a)' = F' - F_a' = f - f = 0 \ .$$

Es ist ein einfache Konsequenz des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung 3.3.3, dass dann $F - F_a$ konstant ist.
In b) ist nun $F_a = F - c$. Es folgt also

$$\int_a^b f(x)dx = F_a(b) - F_a(a) = F(b) - c - F(a) + c = F(b) - F(a) \ .$$

□

7.3 Wichtigste Definition

Der Grenzwertbegriff für Folgen, Funktionen, Funktionenfolgen

7.3.1 Definition (vergl. 2.4.2, 3.1.1)**.** *Man sagt, die Folge* $(a_n)_{n\geq 0}$ **konvergiert** *gegen den* **Grenzwert** $a \in \mathbb{R}$ *und schreibt*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \qquad \textit{oder} \qquad a_n \to a,$$

wenn es zu jeder beliebig kleinen Schranke $\varepsilon > 0$ *einen Index* $n_0 \in \mathbb{N}_0$ *gibt, so dass gilt:*

$$|a_n - a| < \varepsilon \qquad \forall n \geq n_0,$$

Die Funktion f hat für x gegen a den **rechtsseitigen Grenzwert** *c, in Zeichen $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = c$, wenn für jede Folge $(x_n)_{n\geq 0}$ aus I mit $x_n \to a$ und $a < x_n$ für alle n die Folge $\left(f(x_n)\right)_{n\geq 0}$ den Grenzwert c hat.*
f hat für x gegen a den **Grenzwert** *c, in Zeichen $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$, wenn gilt $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = c$. Für $\alpha = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \alpha$ schreiben wir auch*

$$f(x) \xrightarrow{x\to a^+} \alpha$$

(ebenso für $x \to a^-$, $x \to a$).

Grenzwerte werden benutzt in der Definition der Ableitung und des Integrals.
Eine Funktion f ist stetig, wenn

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \ .$$

7.4 Spezielle Funktionen

- Polynome, rationale Funktionen
- trigonometrische Funktionen: sin, cos, tan, cot
- Exponentialfunktion exp (Funktionalgleichung, Differentialgleichung)
- Umkehrfunktionen: Wurzelfunktionen $\sqrt{\cdot}$, Logarithmus ln, arcsin, arccos
- Hyperbelfunktionen sinh, cosh, tanh, arsinh, arcosh

und deren Ableitungen

7.5 Rechenregeln und Formeln

- Additionstheoreme für Sinus und Cosinus
- binomische Formel
- Grenzwertsätze
- Ableitungsreglen (Linearität, Produkt-, Quotienten-, Kettenregel)

- Integrationsregeln (Linearität, partielle Integration, Substitutionsregel)
- Bogenlänge einer Kurve, Oberflächen, Volumen von Rotationskörpern
- Reihendarstellung der elementaren Funktionen
- Taylorformel
- Fourierkoeffizienten

7.6 Algorithmen

- Hornerschema zur Berechnung von Werten von Polynomen 2.2.2
- Newton Interpolationsverfahren zur Bestimmung eines Polynoms durch gegebene Punkte 2.2.13
- Intervallhalbierungsverfahren zum Bestimmen von Nullstellen einer stetigen Funktion 3.1.12
- Newton-Verfahren zur Bestimmung der Nullstellen einer differenzierbaren Funktion 3.3.17

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

- Picard-Iteration zum Lösen von Differentialgleichungen 1. Ordnung 6.3.1.
- Potenzreihenansatz zum Lösen von Differentialgleichungen 6.4

7.7 Sonstiges

- reelle Zahlen: Menge mit zwei Operationen $+, \cdot$, Relation $<$, vollständig, d.h. Grenzwerte existieren.
- komplexe Zahlen $z = x + iy = re^{i\varphi}$ mit $x = r\sin\varphi$, $y = r\cos\varphi$ Multiplikation

$$(x+iy)(x'+iy') = xx' - yy' + i(xy' + x'y) \quad re^{i\varphi}r'e^{i\varphi'} = rr'e^{i(\varphi+\varphi')}$$

- Vollständige Induktion zum Beweis von Aussagen, die für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten sollen
- Potenzreihen und Konvergenzradius, Potenzreihenentwicklung, Fourier-Entwicklung
- Stetigkeit von Funktionen und ihre Konsequenzen 3.1.11: Zwischenwertsatz, Satz von Maximum und Minimum, gleichmäßige Stetigkeit