AG Topologie: Homologie der stabilen Abbildungsklassengruppe nach Madsen und Weiss

Wintersemester 2012/13

Stand 23. Juli 2012

Termin: jeweils montags, 10-12 Uhr, SR 403

Die Abbildungsklassengruppe $\Gamma_{g,b}$ einer glatten zweidimensionalen Mannigfaltigkeit S vom Geschlecht g mit b Randkomponenten ist die Gruppe der Zusammenhangskomponenten der Diffeomorphismengruppe von S. Diese Gruppe operiert auf dem Teichmüllerraum, der Quotient ist der Modulraum der Flächen von Geschlecht g mit b Randkomponenten. Stabilisierung in Richtung g und b liefert die stabile Abbildungsklassengruppe Γ_∞ bzw. den stabilen Modulraum der Flächen. Die Mumford-Vermutung war eine Vorhersage über die (rationale) Homologie dieses Modulraums (alternativ über die Gruppenhomologie von Γ_∞, alternativ über charakteristische Klassen von Flächenbündeln). Ziel dieses Seminars ist es, den Beweis dieser Vermutung zu studieren.

Wesentliche Zutaten sind dafür die Stabilisierungssätze von Harer-Ivanov-Wahl, die unendliche Schleifenraumstruktur von Tillmann und die Arbeit von Madsen und Weiss bzw. die Vereinfachung des Beweises durch Galatius, Madsen, Tillmann und Weiss.

Es gibt verschiedene Einführungstexte, zum ursprünglichen Beweis [Pow06, Wei04] und zum inzwischen vereinfachten Beweis [Hat11, Wei08].

1. **Überblick über den Beweis**

   23.04.2012, Matthias Wendt

2. **Grundlagen Abbildungsklassengruppe**

   30.04.2012, Matthias Wendt

   Grundbegriffe Differentialtopologie, Flächenklassifikation [Hir94, Kapitel 9].

   Teichmüllerraum, Diffeomorphismengruppen, Abbildungsklassengruppen, Modulräume für Riemannsche Flächen, z.B. [Mor07]

   Miller-Morita-Mumford-Klassen und ihre geometrische Bedeutung, z.B. [Mum83, Mil86, Mor87, Mor01]

   Homotopietyp der Diffeomorphismengruppe, cf. [EE69, ES70, Gra74, Gra70]

3. **Klassifizierende Räume**

   07.05.2012, Oliver Straser

Definition klassifizierender Raum für Gruppen, Bar-Konstruktion, Gruppenkohomologie

allgemeiner klassifizierende Räume für Kategorien und Interpretation über Garben [Wei08, Abschnitt 2]

Modell $\mathcal{C}(S, \mathbb{R}^\infty)$ für klassifizierenden Raum der Abbildungsklassengruppe von S

4. **Stabilisierung für die Abbildungsklassengruppe**

   14.05.2012, Matthias Wendt

   Die Homologie der Abbildungsklassengruppe hängt in einem bestimmten Bereich nicht vom Geschlecht und der Anzahl der Randkomponenten der Fläche ab.

   [Har85, Iva90, Wah10]

5. **Unendliche Schleifenräume I**

   21.05.2012, Konrad Völkel

   Definition Schleifenräume, unendliche Schleifenräume, Beziehung zur stabilen Homotopietheorie, Spektra, Darstellungssatz von Brown [Ada78, Kapitel 1]

6. **Unendliche Schleifenräume II**

   04.06.2012, Helene Sigloch

   "Erkennungsprinzipien": A_∞-Strukturen und Schleifenräume, E_∞-Strukturen und unendliche Schleifenräume,

   "Schleifenraum-Maschinen": klassifizierende Räume symmetrisch monoidaler Kategorien sind unendliche Schleifenräume

   [Ada78, Kapitel 2]

7. **Plus-Konstruktion und Gruppenkomplettierung**

   25.06.2012, Michael Rottmaier

   Definition Plus-Konstruktion, Gruppenkomplettierungssatz [Ada78, Kapitel 3] oder darin enthaltene Referenzen.

   verallgemeinerter Gruppenkomplettierungssatz [Til97]

8. **Schleifenraumstruktur auf $B\Gamma_\infty^+$**

   02.07.2012 und 09.07.2012, Matthias Wendt

   Der Satz von Tillmann: $B\Gamma_\infty^+$, die Plus-Konstruktion des klassifizierenden Raums der stabilen Abbildungsklassengruppe, hat die Struktur eines unendlichen Schleifenraums.

   [Til97]

9. **Transfers in der stabilen Homotopietheorie**

   23.07.2012, Sebastian Goette

   Konstruktion und Eigenschaften von Transfer-Abbildungen in der stabilen Homotopietheorie, insbesondere Becker-Gottlieb Transfer [Ada78, Kapitel 4]

10. **Formulierung der ganzzahligen Mumford-Vermutung**

    22.10.2012, Sebastian Goette

    Konstruktion der Abbildung $\alpha_\infty : \mathbb{Z} \times B\Gamma_\infty^+ \to \Omega^\infty(\mathbb{CP}_{-1}^\infty)$, Vergleich von topologischer Konstruktion und ursprünglicher Konstruktion der Miller-Morita-Mumford-Klassen.

    [MT01, Abschnitt 2]

11. **Überblick über [GMTW]**

    29.10.2012, Matthias Wendt

12. **Homotopietheorie von Garben I**

    05.11.2012, Helene Sigloch und Konrad Völkel

    Für [GMTW] werden nur Garben von Mengen benötigt. Die beiden Vorträge über Homotopietheorie von Garben sollen ein wenig den Hintergrund von fibranten Garben im Kontext von h-Prinzipien beleuchten.

    Grothendieck-Topologien, Garben auf Kategorien, Jardine-Modellstruktur für simpliziale Garben

13. **Homotopietheorie von Garben II**

    12.11.2012, Helene Sigloch und Konrad Völkel

    Homotopiepullbacks in Modellkategorien, Homotopiegarben vs. h-Prinzipien in der Differentialtopologie

14. **Kobordismuskategorie und assoziierte Garbe**

    19.11.2012

    Definition der Kobordismen-Kategorie [GMTW, Kapitel 2.1]

    Garbenmodell für den klassifizierenden Raum der Kobordismen-Kategorie [GMTW, Kapitel 2.2,2.3]

15. **Thom-Spektrum $MT(d)$ und assoziierte Garbe**

    26.11.2012

    Definition $MT(d)$ und Beschreibung der assoziierten Garbe [GMTW, Kapitel 3]

16. **Homologie von $MT(2)$**

    03.12.2012

    rationale Homologie von $\Omega^\infty(\mathbb{CP}_{-1}^\infty)$, mod p Homologie [Gal04]

17. **Homotopietyp der Kobordismen-Kategorie**

    10.12.2012

    Beweis des Hauptsatzes in [GMTW, Kapitel 2.4,4]

18. **Beweis der Mumford-Vermutung**

    17.12.2012

    Ableitung der Mumford-Vermutung bzw. ihrer ganzzahligen Verallgemeinerung von Madsen und Tillmann aus den Ergebnissen von [GMTW] über den Homotopietyp der Kobordismen-Kategorie

    [GMTW, Kapitel 7]

Literatur

[Ada78] J.F. Adams. Infinite loop spaces. Annals of Mathematics Studies, 90. Princeton University Press, 1978.

[EE69] C.J. Earle and J. Eells. A fibre bundle description of Teichmüller theory. J. Differential Geometry (3) 19–43, 1969.

[ES70] C.J. Earle and A. Schatz. Teichmüller theory for surfaces with boundary. J. Differential Geometry (4) 169–185, 1970.

[Gal04] S. Galatius. Mod p homology of the stable mapping class group. Topology 43 (2004), no. 5, 1105–1132.

[Gra70] A. Gramain. Le type d'homotopie du groupe des difféomorphismes d'une surface compacte. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 6 (1973), 53–66.

[Gra74] A. Gramain. Groupe des difféomorphismes et espace de Teichmüller d'une surface (d'après C. Earle et J. Eells). Séminaire Bourbaki, 25ème année (1972/1973), Exp. No. 426, pp. 157–170. Lecture Notes in Math., Vol. 383, Springer, 1974.

[GMTW] S. Galatius, I. Madsen, U. Tillmann and M. Weiss. The homotopy type of the cobordism category. Acta Math. 202 (2009), no. 2, 195–239.

[Har85] J.L. Harer. Stability of the homology of the mapping class groups of orientable surfaces. Ann. of Math. (2) 121 (1985), no. 2, 215–249.

[Hat11] A. Hatcher. A short exposition of the Madsen-Weiss theorem. Preprint, arXiv:1103.5223.

[Hir94] M.W. Hirsch. Differential topology. Corrected reprint of the 1976 original. Graduate Texts in Mathematics, 33. Springer-Verlag, 1994.

[Iva90] N.V. Ivanov. Stabilization of the homology of Teichmüller modular groups. Algebra i Analiz 1 (1989), no. 3, 110–126; translation in Leningrad Math. J. 1 (1990), no. 3, 675–691.

[Mil86] E. Miller. The homology of the mapping class group, J. Differential Geom. 24 (1986), no. 1, 1–14.

[Mor87] S. Morita. Characteristic classes of surface bundles, Invent. Math. 90 (1987), no. 3, 551–577.

[Mor01] S. Morita. Geometry of characteristic classes. Translated from the 1999 Japanese original. Translations of Mathematical Monographs, 199. Iwanami Series in Modern Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[Mor07] S. Morita. Introduction to mapping class groups of surfaces and related groups. Handbook of Teichmüller theory. Vol. I, 353–386, IRMA Lect. Math. Theor. Phys., 11, Eur. Math. Soc., Zürich, 2007.

[Mum83] D. Mumford. Towards an enumerative geometry of the moduli space of curves. Arithmetic and geometry, Vol. II, 271–328, Progr. Math., 36, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1983.

[MT01] I. Madsen and U. Tillmann. The stable mapping class group and $Q(\mathbb{C}P^\infty_+)$. Invent. Math. 145 (2001), no. 3, 509–544.

[MW05] I. Madsen and M. Weiss. The stable mapping class group and stable homotopy theory. European Congress of Mathematics, 283–307, Eur. Math. Soc., Zürich, 2005.

[MW07] I. Madsen and M. Weiss. The stable moduli space of Riemann surfaces: Mumford's conjecture. Ann. of Math. (2) 165 (2007), no. 3, 843–941.

[Pow06] G. Powell. The Mumford conjecture (after Madsen and Weiss). Séminaire Bourbaki. Vol. 2004/2005. Astérisque No. 307 (2006), Exp. No. 944, viii, 247–282.

[Rud98] Y.B. Rudyak. On Thom spectra, orientability, and cobordism. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, 1998.

[Swi02] R.M. Switzer. Algebraic topology–homotopy and homology. Reprint of the 1975 original. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, 2002.

[Til97] U. Tillmann. On the homotopy of the stable mapping class group. Invent. Math. 130 (1997), no. 2, 257–275.

[Wah10] N. Wahl. Homological stability for mapping class groups of surfaces. Preprint, arXiv:1006.4476.

[Wei04] M. Weiss. Cohomology of the stable mapping class group. Topology, geometry and quantum field theory, 379–404, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 308, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004.

[Wei08] M. Weiss. New sheaf theoretic methods in differential topology. Arch. Math. (Brno) 44 (2008), no. 5, 549–567.