"Algebra und Zahlentheorie"
WS 2013/14 — Übungsblatt 1

Ausgabe: 25.10.2013, **Abgabe:** 31.10.2013

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ws13/algebra.html

Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 1.1: Suchen Sie in der Literatur (Formelsammlung, Internet,...) nach den Lösungsformeln für Gleichungen 3. und 4. Grades. Geben Sie Ihre Referenz an. Lösen Sie mit diesen Formeln:

1. $x^3 - 11x - 20 = 0$
2. $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$
3. $x^4 + x^2 + 1 = 0$

(10 Punkte)

Aufgabe 1.2: Zeigen Sie: Das neutrale Element einer Gruppe ist eindeutig. Das inverse Element zu einem Gruppenelement ist ebenfalls eindeutig.

(3 Punkte)

Aufgabe 1.3: Welche der folgenden Mengen sind Gruppen? Welche Axiome sind erfüllt bzw. verletzt?

1. $\mathbb{N}_0$ mit der Addition.
2. $\mathbb{N}_0$ mit der Multiplikation.
3. $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ mit der Multiplikation.
4. $\{t_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \mid a \in \mathbb{R}^2\}$ mit $t_a(x) = x + a$ mit der Verknüpfung von Abbildungen.
5. $\mathbb{N}$ mit der Verknüpfung: $a \circ b = \max(a, b)$.

(6 Punkte)

Aufgabe 1.4: Zeigen Sie: $\exp : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}^{>0}, \cdot)$ ist ein Gruppenisomorphismus.

(3 Punkte)

(bitte wenden)

Anwesenheitsaufgaben 28.–30.10.2013

Aufgabe 1.5: Sei k ein Körper. Zeigen Sie:

$$\begin{array}{rcl} (k,+) & \to & (\mathrm{GL}_2(k),\cdot) \\ x & \mapsto & \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

ist ein injektiver Gruppenhomomorphismus.

Aufgabe 1.6: Beweisen Sie:

1. Die Verknüpfung von zwei Gruppenhomomorphismen ist ein Gruppenhomomorphismus.
2. Das Inverse eines Gruppenisomorphismus ist ein Gruppenhomomorphismus (und damit auch ein Gruppenisomorphismus).

Aufgabe 1.7: Bestimmen Sie jeweils für die folgenden Relationen $\sim$ auf $\mathbb{N}$, ob sie symmetrisch, reflexiv bzw. transitiv sind:

	reflexiv	symmetrisch	transitiv
$a \sim b \Leftrightarrow a - b = 1$	○	○	○
$a \sim b \Leftrightarrow (a-b) \in \{0,1\}$	○	○	○
$a \sim b \Leftrightarrow \lvert a-b \rvert = 1$	○	○	○
$a \sim b \Leftrightarrow a - b < 0$	○	○	○
$a \sim b \Leftrightarrow \lvert a-b \rvert < 0$	○	○	○
$a \sim b \Leftrightarrow a - b \leq 0$	○	○	○
$a \sim b \Leftrightarrow \lvert a-b \rvert \leq 1$	○	○	○
$a \sim b \Leftrightarrow 2 \mid (a-b)$	○	○	○

Falls eine der Relationen eine Äquivalenzrelation ist, bestimmen Sie die Äquivalenzklassen.

Aufgabe 1.8: Sei S_3 die symmetrische Gruppe der Menge $\{1,2,3\}$. Betrachten Sie die Permutation

$$\sigma: \quad 1 \mapsto 2, \quad 2 \mapsto 3, \quad 3 \mapsto 1$$

1. Welche Ordnung hat σ?
2. Beweisen Sie: Die von σ erzeugte Untergruppe $U \subset S_3$ ist ein Normalteiler.
3. Bestimmen Sie explizit die Restklassen S_3/U.
4. Verifizieren Sie durch explizite Rechnung, dass $S_3/U \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.