"Algebra und Zahlentheorie"
WS 2013/14 — Übungsblatt 10

Ausgabe: 17.01.2014, **Abgabe:** 24.01.2014

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ws13/algebra.html

Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 10.1: Für welche $x \in \mathbb{Q}$ ist die Erweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{x}) : \mathbb{Q}$ galoissch? Für welche p und $x \in \mathbb{F}_p$ ist die Erweiterung $\mathbb{F}_p(\sqrt[3]{x}) : \mathbb{F}_p$ galoissch?

(2 Punkte)

Aufgabe 10.2: Sei φ die Eulersche Funktion, definiert durch

$$\varphi(n) = \#\{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \mid \operatorname{ggT}(n, i) = 1\}$$

für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Zeigen Sie:

1. $\varphi(n) = \#(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ (Einheitengruppe).
2. $\varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m)$, falls $\operatorname{ggT}(n, m) = 1$.
3. $\varphi(p^n) = p^{n-1}(p-1)$ falls p prim ist und $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.

(6 Punkte)

Aufgabe 10.3:

1. Sei K ein Körper. Beweisen Sie, dass K höchstens n verschiedene Einheitswurzeln enthält, deren Ordnung n teilt.
2. Beweisen Sie mit Hilfe von Satz 2.10, dass für eine endliche abelsche Gruppe G die folgenden Aussagen äquivalent sind:
   (a) G ist zyklisch.
   (b) Für jedes n gibt höchstens n verschiedene Elemente, deren Ordnung ein Teiler von n ist.
3. Folgern Sie: Eine endliche Untergruppe der multiplikativen Gruppe eines Körpers ist zyklisch. Insbesondere ist K^* selber zyklisch, wenn K ein endlicher Körper ist.

(6 Punkte)

(bitte wenden)

Aufgabe 10.4: Bestimmen Sie die Galoisgruppe des Zerfällungskörpers L von $X^3 - 2$ über $\mathbb{Q}$ wie folgt:

1. Beweisen Sie, dass das Polynom über $\mathbb{Q}$ irreduzibel ist. Folgern Sie, dass $L/\mathbb{Q}$ Grad 3 oder 6 hat.

2. Beweisen Sie, dass $\omega = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ in L liegt, $K := \mathbb{Q}(\omega)$ also Grad 2 über $\mathbb{Q}$ hat. Folgern Sie, dass $L/\mathbb{Q}$ Grad 6 hat und von $\sqrt[3]{2}$ (eine adjungierte Nullstelle von $X^3 - 2$) und ω erzeugt wird.

3. Bestimmen Sie alle Automorphismen von L, indem Sie die möglichen Bilder von ω und $\sqrt[3]{2}$ bestimmen.

4. Rechnen Sie nach, dass die Galoisgruppe nicht kommutativ ist.

(4 Punkte)