"Algebra und Zahlentheorie"
WS 2013/14 — Übungsblatt 11

Ausgabe: 24.01.2014, **Abgabe:** 31.01.2014

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ws13/algebra.html

Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 11.1: Sei K ein Körper. Beweisen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

1. K ist vollkommen.
2. K hat Charakteristik 0 oder K hat Charakeristik p und der Frobenius $F_p : x \mapsto x^p$ ist bijektiv.

(3 Punkte)

Aufgabe 11.2: Bestimmen Sie das Minimalpolynom von $\sqrt[4]{2} + i$ über $\mathbb{Q}$. *Hinweis: Bestimmen Sie zunächst explizit die Operation der Galoisgruppe der Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)/\mathbb{Q}$ auf $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)$. Benutzen Sie dann das Verfahren aus dem Beweis von 11.21.*

(4 Punkte)

Aufgabe 11.3: Geben Sie ein Beispiel für eine endliche, nicht-separable Körpererweiterung L/K an. (Mit Beweis!)

(3 Punkte)

(bitte wenden)

Aufgabe 11.4: Sei L/K eine Körpererweiterung. Definiere die Abbildungen

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}_{L/K} : L &\to L \\ x &\mapsto \sum_{\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)} \sigma(x) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \mathrm{N}_{L/K} : L &\to L \\ x &\mapsto \prod_{\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)} \sigma(x). \end{aligned}$$

1. Beweisen Sie: Falls L/K galoissch ist, dann gilt $\mathrm{N}_{L/K}(x) \in K$ und $\mathrm{Tr}_{L/K}(x) \in K$ für alle $x \in L$.

2. Sei $x \in L$ so, dass $L = K(x)$. Gibt es in diesem Fall eine Beziehung zwischen dem Minimalpolynom von x und $\mathrm{Tr}_{L/K}(x)$, sowie $\mathrm{N}_{L/K}(x)$?

(4 Punkte)