“Algebra und Zahlentheorie”
WS 2013/14 — Übungsblatt 12

Ausgabe: 31.01.2014, **Abgabe:** 07.02.2014

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ws13/algebra.html

Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 12.1: Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$. Betrachten Sie die beiden Elemente

$$\alpha = 3 + \sqrt{3} \quad \text{und} \quad \beta = (2 + \sqrt{2})(3 + \sqrt{3})$$

von K.

1. Beweisen Sie, dass $K(\sqrt{\alpha})/\mathbb{Q}$ und $K(\sqrt{\beta})/\mathbb{Q}$ galoissch sind.
2. Geben Sie die Struktur der Galoisgruppen an.
3. Berechnen Sie alle Zwischenkörper von $K(\sqrt{\alpha})/\mathbb{Q}$ und $K(\sqrt{\beta})/\mathbb{Q}$ und geben Sie Erzeuger an.

Hinweis: Sie erhalten 2 verschiedene Gruppen und verschiedene Zwischenkörperstrukturen.

(12 Punkte)

Aufgabe 12.2: Sei L/K eine Galoiserweiterung vom Grad n und $v_1, \dots, v_n$ eine Basis von L als K-Vektorraum. Sei $\mathrm{Gal}(L/K) = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$. Beweisen Sie, dass die Matrix

$$\begin{pmatrix} \sigma_1(v_1) & \dots & \sigma_n(v_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_1(v_n) & \dots & \sigma_n(v_n) \end{pmatrix}$$

invertierbar ist.

(4 Punkte)

(bitte wenden)

Aufgabe 12.3: Sei ζ_p eine primitive p-te Einheitswurzel, wobei p eine ungerade Primzahl ist. Wir haben einen natürlichen Isomorphismus

$$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_p)/\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*.$$

Beweisen Sie, dass es zu jedem Teiler d von $p-1$ genau einen Zwischenkörper vom Grad d gibt. Insbesondere gibt es einen Zwischenkörper vom Grad 2, der also von der Form $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ ist.

(2 Punkte)

Bonus-Aufgabe 12.4: Sei K ein Körper, $\lambda \in K \setminus \{0\}$ und

$$C = \{x^2 + y^2 = \lambda \mid x, y \in K\}$$

1. Falls $C \neq \emptyset$, geben Sie eine Bijektion

$$C \cong \begin{cases} K \cup \{\infty\} & \text{1. Fall} \\ K \setminus \{0\} & \text{2. Fall} \end{cases}$$

   an und ein einfaches Kriterium dafür, welcher Fall auftritt.

2. Falls K endlich ist, beweisen Sie, dass $C \neq \emptyset$.

Hinweis zu 1.: Projizieren Sie aus einem Punkt $(x, y) \in C$ auf die x oder y-Achse. Hinweis zu 2.: Schreiben Sie die Gleichung in der Form $x^2 = \lambda - y^2$ und zählen Sie ab.

(4 Punkte)

Bonus-Aufgabe 12.5: Mit den Bezeichnungen von Aufgabe 12.3:

1. Beweisen Sie, dass

$$\mu = \sum_{x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} (\zeta_p)^{x^2}$$

   in K liegt.

2. Berechnen Sie μ^2. Folgern Sie, welches d oben (siehe Aufgabe 12.3) genommen werden kann.

Hinweis zu 2.: Benutzen Sie Aufgabe 12.4!

(4 Punkte)