"Algebra und Zahlentheorie"
WS 2013/14 — Übungsblatt 2

Ausgabe: 01.11.2013, **Abgabe:** 08.11.2013

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ws13/algebra.html

Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 2.1: Sei S_3 die symmetrische Gruppe der Menge $\{1, 2, 3\}$. Betrachten Sie die Permutation

$$\tau : \quad 1 \mapsto 2, \quad 2 \mapsto 1, \quad 3 \mapsto 3$$

und die davon erzeugte Untergruppe $\langle\tau\rangle$. Berechnen Sie explizit alle Rechts- und Linksnebenklassen und finden Sie eine Rechtsnebenklasse, die keine Linksnebenklasse ist.

(6 Punkte)

Aufgabe 2.2: Beweisen Sie: Jede Untergruppe H vom Index 2 einer Gruppe G ist ein Normalteiler.

(3 Punkte)

Aufgabe 2.3: Beweisen Sie: Sei $\varphi : G \to H$ ein surjektiver Homomorphismus von Gruppen und $N \subset G$ ein Normalteiler. Dann ist auch $\varphi(N)$ ein Normalteiler.

(4 Punkte)

Aufgabe 2.4: Die Gruppe $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ wird **Kleinsche Vierergruppe** genannt. Finden Sie Erzeuger und Relationen für diese Gruppe. Begründen Sie Ihre Antwort.

(2 Punkte)

Bonus-Aufgabe 2.5: Seien H und K Untergruppen einer Gruppe G. Eine Menge der Form

$$HgK = \{x \in G \mid x = hgk \text{ für ein } h \in H, k \in K, g \in G\}$$

heisst **Doppelnebenklasse**.

1. Beweisen Sie: Die Doppelnebenklassen bilden eine Partition von G.
2. Haben alle Doppelnebenklassen dieselbe Anzahl von Elementen?

(4 Punkte)