"Algebra und Zahlentheorie"
WS 2013/14 — Übungsblatt 3

Ausgabe: 08.11.2013, **Abgabe:** 15.11.2013

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ws13/algebra.html

Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 3.1: Seien disjunkte Elemente $a_1, \ldots, a_k \in \{1, \ldots, n\}$ gegeben und $\gamma \in S_n$ eine Permutation. Beweisen Sie die Formel:

$$\gamma(a_1\ a_2\ \ldots\ a_k)\gamma^{-1} = (\gamma(a_1)\ \gamma(a_2)\ \cdots\ \gamma(a_k)).$$

(3 Punkte)

Aufgabe 3.2: Sei G die Gruppe, welche durch x und y erzeugt wird und durch die Relationen

$$x^4 = 1 \qquad x^2 = y^2 \qquad xyx^{-1} = y^{-1}$$

gegeben ist.
Bestimmen Sie die Ordnung von G und alle Untergruppen. Geben Sie jeweils an, ob es sich um einen Normalteiler handelt, oder nicht.

(6 Punkte)

Aufgabe 3.3: Seien G und H zwei zyklische Gruppen der Ordnung n bzw. $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Unter welcher genauen Bedingung an n und m ist $G \times H$ wieder zyklisch? Antwort bitte begründen.

(4 Punkte)

Aufgabe 3.4: Sei $M = \mathbb{Z}^2$ und $N = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} M$. Ist M/N zyklisch, und falls ja, von welcher Ordnung? Antwort bitte begründen.

(4 Punkte)