“Algebra und Zahlentheorie”
WS 2013/14 — Übungsblatt 4

Ausgabe: 15.11.2013, **Abgabe:** 22.11.2013

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ws13/algebra.html

Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 4.1: Sei G eine Gruppe und $H \subset G$ eine Untergruppe. Beweisen Sie, dass die Linksmultiplikation von G auf G/H eine Operation definiert. Ist die Operation transitiv? Gibt es Fixpunkte? Welche sind die Standgruppen?

(4 Punkte)

Aufgabe 4.2: Sei G die Drehgruppe des dreidimensionalen Würfels, d.h.

$$G = \{g \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) \mid gW = W\} \quad \text{wobei} \quad W = [-1,1]^3 \subset \mathbb{R}^3$$

Beweisen Sie, dass G zur S_4 isomorph ist, und zwar wie folgt:

1. Begründen Sie: G operiert auf der Menge der 4 Diagonalen des Würfels.
2. Zeigen Sie, dass die zugehörige Abbildung $\rho : G \to S_4$ injektiv ist. (m.a.W., dass die Operation treu ist).
3. Begründen Sie, dass G und S_4 gleich viele Elemente enthalten.
4. Folgern Sie, dass ρ ein Isomorphismus ist.

Hinweis zu 2. Welche sind die möglichen Matrixdarstellungen eines Elementes $g \in \ker(\rho)$ ausgedrückt in der Basis

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}?$$

Beachten Sie: $\det(g) = 1$.

(8 Punkte)

(bitte wenden)

Aufgabe 4.3: Begründen Sie: Die Drehgruppe des Würfels G aus Aufgabe 4.2 permutiert auch die 3 Achsen des $\mathbb{R}^3$. Durch Zusammensetzung des zugehörigen Morphismus $\tau : G \to S_3$ mit dem Isomorphismus aus Aufgabe 4.2 bekommen wir einen Homomorphismus $\tau \circ \rho^{-1} : S_4 \to S_3$. Bestimmen Sie dessen Kern in Zykelschreibweise.

(4 Punkte)

Bonus-Aufgabe 4.4: Beweisen Sie: Die Abbildung $S_4 \to S_3$ aus Aufgabe 4.3 ist (bis auf Konjugation) der einzige *surjektive* Homomorphismus

$$S_n \to S_m,$$

mit $n > m \geq 3$.

(4 Punkte)