“Algebra und Zahlentheorie”
WS 2013/14 — Übungsblatt 5

Ausgabe: 22.11.2013, **Abgabe:** 29.11.2013

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ws13/algebra.html

Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 5.1: Verallgemeinern Sie Aufgabe 2.2 wie folgt: Jede Untergruppe H vom Index n in G enthält einen Normalteiler vom Index höchstens $n!$ in G.
Hinweis: Wenden Sie Lemma 3.2 auf die Operation aus Aufgabe 4.1 an.

(5 Punkte)

Aufgabe 5.2: Beweisen Sie, dass eine Gruppe der Ordnung pq, wobei p und q Primzahlen sind[1], nicht einfach ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 5.3: Sei p eine Primzahl. Betrachten Sie den 2-dimensionalen Vektorraum $V = \mathbb{F}_p^2$. Die Gruppe $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ operiert auf V.

1. Bestimmen Sie die Bahnen und eine Standgruppe in jeder Bahn.
2. Leiten Sie aus der Bahnenformel eine Formel für $|G|$ her.
3. Bestimmen Sie die p-Sylowgruppen von G.
4. Beweisen Sie für $p = 2$, dass $G \cong S_3$ ist.

(8 Punkte)

(bitte wenden)

[1] $p = q$ ist erlaubt

Bonus-Aufgabe 5.4: Klassifizieren Sie die Gruppen der Ordnung 12.

1. Sei H eine 2-Sylowgruppe und K eine 3-Sylowgruppe einer Gruppe G der Ordnung 12. Beweisen Sie mittels der Sylowsätze, dass mindestens eine der beiden Untergruppen ein Normalteiler ist.

2. Falls H und K beide Normalteiler sind, beweisen Sie: G ist isomorph zum Produkt $H \times K$. Klassifizieren Sie die Möglichkeiten.

3. Falls H Normalteiler ist und K nicht, untersuchen Sie die Operation von G durch Konjugation auf der Menge der 3-Sylowgruppen. Folgern Sie $G \cong A_4$.

4. Falls K Normalteiler ist und H nicht, untersuchen Sie die Operation von H durch Konjugation auf K. Es gibt zwei verschiedene Möglichkeiten, je nach dem, ob $H \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ oder $H \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Hinweis: Insgesamt sollten Sie genau 5 Isomorphieklassen finden.

(10 Punkte)