"Algebra und Zahlentheorie"
WS 2013/14 — Übungsblatt 7

Ausgabe: 06.12.2013, **Abgabe:** 13.12.2013

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ws13/algebra.html

Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 7.1: Ein Ring R heisst **noethersch**, falls für jede aufsteigende Kette von Idealen von R:

$$\mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{a}_2 \subset \mathfrak{a}_3 \subset \cdots$$

ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$\mathfrak{a}_N = \mathfrak{a}_{N+1} = \mathfrak{a}_{N+2} = \cdots .$$

Beweisen Sie:

$$R \text{ Hauptidealring} \Rightarrow R \text{ noethersch.}$$

(4 Punkte)

Aufgabe 7.2: Sei R ein Hauptidealring. Beweisen Sie: Jedes Element $x \in R$ ist ein Produkt

$$x = r_1 \cdots r_n,$$

wobei die r_i unzerlegbar sind.
Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 7.1

(4 Punkte)

Aufgabe 7.3: Betrachten Sie den Ring

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + b \cdot i \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$

mit $i^2 = -1$. Beweisen Sie das folgende Analogon zur Divison mit Rest:

- Für zwei Elemente $x, y \in \mathbb{Z}[i]$ mit $y \neq 0$ existieren $q, r \in \mathbb{Z}[i]$ mit

  $$x = q \cdot y + r$$

  wobei $N(r) < N(y)$. Hierbei ist $N(a + b \cdot i) = a^2 + b^2 = |a + b \cdot i|^2$.

Folgern Sie, dass $\mathbb{Z}[i]$ ein Hauptidealring ist.

(6 Punkte)

(bitte wenden)

Aufgabe 7.4: Beweisen Sie, dass die folgenden Polynome in $\mathbb{Q}[x]$ unzerlegbar sind:

1. $x^2 + 27x + 213$
2. $x^3 + 6x + 12$
3. $8x^3 - 6x + 1$
4. $x^3 + 6x^2 + 7$
5. $x^5 - 3x^4 + 3$

(5 Punkte)

Bonus-Aufgabe 7.5: Sei $p = 4N + 1$ eine Primzahl ($N \in \mathbb{Z}$).
Behauptung: Es existieren $a, b \in \mathbb{Z}$ mit

$$p = a^2 + b^2.$$

Beweisen Sie die Behauptung wie folgt:

1. Beweisen Sie, dass $\mathbb{Z}[i]/(p) \cong \mathbb{F}_p[X]/(X^2 + 1)$.
2. Benutzen Sie 1. um zu zeigen, dass $\mathbb{Z}[i]/(p)$ kein Körper sein kann.
3. Folgern Sie aus Aufgabe 7.3, dass p im Ring $\mathbb{Z}[i]$ nicht unzerlegbar sein kann.
4. Beweisen Sie die Formel $N(xy) = N(x)N(y)$ für die Funktion
$$N : a + bi \mapsto a^2 + b^2.$$
5. Beweisen Sie, dass ein Element $x \in \mathbb{Z}[i]$ mit $N(x) = 1$ invertierbar ist.
6. Wenden Sie dann die Funktion N auf die Zerlegung aus Aufgabe 7.2 für $x = p$ an.

(6 Punkte)