# "Algebra und Zahlentheorie"
# WS 2013/14 — Übungsblatt 8

**Ausgabe:** 13.12.2013, **Abgabe:** 20.12.2013

---

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ws13/algebra.html

Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

---

**Aufgabe 8.1:** Bestimmen Sie den Grad der folgenden Erweiterungen und begründen Sie Ihre Antworten:

1. $\mathbb{Q}(\sqrt{5})/\mathbb{Q}$,
2. $\mathbb{Q}(\sqrt{11}, \sqrt{17})/\mathbb{Q}$,
3. $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})/\mathbb{Q}(\sqrt{2})$,
4. $\mathbb{Q}(\omega)/\mathbb{Q}$ wobei $\omega \in \mathbb{C}$ mit $\omega^7 = 1$, $\omega \neq 1$.

(4 Punkte)

**Aufgabe 8.2:** Sei $K$ ein Körper mit $2 \neq 0$ in $K$. Sei $L/K$ eine Körpererweiterung vom Grad 2. Zeigen Sie, dass es $a \in K$ gibt mit $L = K(\sqrt{a})$.

(4 Punkte)

**Aufgabe 8.3:** Sei $L/K$ eine endliche Körpererweiterung, $a \in L$. Sei

$$\phi_a : L \to L, \qquad x \mapsto ax.$$

Zeigen Sie:

1. $\phi_a$ ist eine $K$-lineare Abbildung.
2. Das Minimalpolynom von $a$ stimmt mit dem Minimalpolynom von $\phi_a$ überein.
3. Wenn $L = K(a)$, so stimmt das Minimalpolynom von $a$ bis auf Vorzeichen mit dem charakteristischen Polynom von $\phi_a$ überein.
4. Betrachten Sie den expliziten Fall $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})/\mathbb{Q}$ und $a = -\sqrt[3]{5}$. Berechnen Sie eine darstellende Matrix von $\phi_a$, charakteristisches Polynom und Minimalpolynom.

(8 Punkte)

**Bonus-Aufgabe 8.4:** In Aufgabe 8.3 ist das charakteristische Polynom von $\phi_a$ immer (bis auf Vorzeichen) eine Potenz des Minimalpolynoms.

(3 Punkte)