"Algebra und Zahlentheorie"
WS 2013/14 — Übungsblatt 9

Ausgabe: 10.01.2014, **Abgabe:** 17.01.2014

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ws13/algebra.html

Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 9.1: Beweisen Sie die folgenden Gesetze für die natürlichen Zahlen unter Verwendung der Peano-Axiome:

1. Kommutativgesetz für die Addition
2. Kürzungsregel der Addition: Ist $a + b = a + c$, so ist $b = c$

(6 Punkte)

Aufgabe 9.2: Sei K ein endlicher Körper, d.h. mit endlich vielen Elementen. Sei q die Anzahl der Elemente. Zeigen Sie:

1. q ist eine Potenz einer Primzahl p.
2. In K gilt $p = 0$.
3. Zeigen Sie, dass K nicht algebraisch abgeschlossen ist.

Hinweis zu 3.: Zählen Sie die Polynome vom Grad n über K und die Polynome, die in Linearfaktoren zerfallen.

(6 Punkte)

Aufgabe 9.3:

1. Bestimmen Sie die Menge der Körperautomorphismen $\mathbb{Q}(X) \to \mathbb{Q}(X)$.
2. Bestimmen Sie die Menge der Körperautomorphismen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Hinweis zu 1.: Fassen Sie Körperautomorphismen als Abbildungen auf $\overline{\mathbb{Q}}$ auf, wobei $\overline{\mathbb{Q}}$ ein algebraischer Abschluss von $\mathbb{Q}$ ist, welche für alle bis auf endlich viele Elemente definiert sind.
Hinweis zu 2.: Beweisen Sie zunächst, dass ein Körperautomorphismus $\mathbb{Q}$ elementweise festhält. Dann beweisen Sie, dass ein Körperautomorphismus auf $\mathbb{R}$ die Ordnung $\leq$ erhält.

(8 Punkte)