“Algebra und Zahlentheorie”
WS 2013/14 — Probeklausur

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.

Aufgabe K.1: Geben Sie die Definitionen von “normal”, “separabel” und “galoissch” für eine Körpererweiterung an.

Aufgabe K.2: Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ algebraisch über $\mathbb{Q}$. Geben Sie das algebraische Kriterium dafür an, ob α mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist.

Aufgabe K.3: Geben Sie die Definition von “auflösbarer Gruppe” an.

Aufgabe K.4: Beantworten Sie die folgenden Fragen mit Ja oder Nein und geben Sie eine kurze Begründung in 1–2 Sätzen.

1. $X^8 + X^7 + X^6 + X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ ist in $\mathbb{Q}[X]$ irreduzibel.
2. Jede Gruppe der Ordnung pq ist auflösbar, wobei p und q Primzahlen sind.
3. Jede Untergruppe vom Index 2 ist ein Normalteiler.
4. Seien $L/F/K$ endliche Körpererweiterungen. Dann gilt: L/K galoissch impliziert L/F galoissch.
5. Jede endliche Körpererweiterung ist algebraisch.
6. Sei k ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Die Menge k^n mit komponentenweiser Addition und Multiplikation ist wieder ein Körper.

Aufgabe K.5: Beschreiben Sie die 2-Sylowgruppen von S_4. Wieviele gibt es?

Aufgabe K.6: Geben Sie eine galoissche Körpererweiterung über $\mathbb{Q}$ mit Galoisgruppe S_3 an, indem Sie erzeugende Elemente und die explizite Operation der Galoisgruppe darauf angeben. Bestimmen Sie alle Zwischenkörper.

Aufgabe K.7: Wieviele Faktoren vom Grad 1, Grad 2, Grad 3, u.s.w. kommen jeweils in der Zerlegung von $X^{24} - 1$ im Ring $\mathbb{F}_5[X]$ in irreduzible Faktoren vor? *Sie müssen die Zerlegung nicht explizit angeben.*

Aufgabe K.8: Sei L ein Teilkörper von $\mathbb{C}$, der eine Galoiserweiterung von $\mathbb{Q}$ ist. Beweisen Sie, dass die komplexe Konjugation L auf sich abbildet und deshalb einen Automorphismus von L definiert.