"Algebra und Zahlentheorie"
WS 2013/14 — Weihnachts-Übungsblatt

Ausgabe: 20.12.2013, **Abgabe:** 10.01.2014

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ws13/algebra.html

Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Bonus-Aufgabe W.1: Sei N eine ganze Zahl und m eine zu N teilerfremde Zahl. Beweisen Sie: Es gibt eine ganze Zahl $n \geq 1$ so, dass

$$N|(m^n - 1).$$

(2 Punkte)

Bonus-Aufgabe W.2: Sei k ein Körper. Beweisen Sie, dass das Zentrum von $\mathrm{GL}_n(k)$ nur aus den Skalarmatrizen $\begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha \end{pmatrix}$ besteht.

(3 Punkte)

Bonus-Aufgabe W.3: Sei G eine Gruppe und (G, G) die Untergruppe, die von allen Elementen der Form $aba^{-1}b^{-1}, a, b \in G$ erzeugt wird. Beweisen Sie:

1. Jeder Automorphismus $\varphi : G \to G$ erfüllt $\varphi((G, G)) = (G, G)$. Insbesondere ist (G, G) ein Normalteiler.
2. $G/(G, G)$ ist abelsch.
3. $p : G \to G/(G, G)$ erfüllt die folgende universelle Eigenschaft: Für jeden Gruppenhomomorphismus $\alpha : G \to H$, wobei H abelsch ist, gibt es einen eindeutigen Gruppenhomomorphismus $\widetilde{\alpha} : G/(G, G) \to H$, so dass $\alpha = \widetilde{\alpha} \circ p$.

(6 Punkte)

Bonus-Aufgabe W.4: Betrachten Sie die Abbildung $\sigma : \{1, \ldots, 10\} \to \{1, \ldots, 10\}$, welche durch die Wertetabelle

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
7	3	8	9	6	5	4	2	10	1

gegeben ist. Bestimmen Sie die Ordnung von σ in S_{10}.

(2 Punkte)

Bonus-Aufgabe W.5: Sei A ein Ring (kommutativ mit Eins), $a \in A$ heisst *nilpotent*, wenn es ein $n > 0$ gibt mit $a^n = 0$. Zeigen Sie: Die Menge der nilpotenten Elemente von A ist ein Ideal und in allen maximalen Idealen enthalten.

(4 Punkte)

Bonus-Aufgabe W.6: Zerlegen Sie das Polynom $X^{12} - 2X^6 + 1 \in \mathbb{Q}[X]$ in irreduzible Faktoren.

(3 Punkte)

Bonus-Aufgabe W.7: Bestimmen Sie den Grad der Körpererweiterung

$$\mathbb{Q}(\sqrt{1+i}, \sqrt{1-i})/\mathbb{Q}.$$

(4 Punkte)

Bonus-Aufgabe W.8: Konstruieren Sie das regelmässige Fünfeck mit Zirkel und Lineal.

1. Geben Sie die Konstruktion (mit Begründung) an.
2. Führen Sie die Konstruktion auf Papier aus.

Hinweis: Sei $\zeta \in \mathbb{C}$ eine primitive 5. Einheitswurzel. Finden Sei ein normiertes quadratisches Polynom $p \in \mathbb{Q}[X]$ mit $p(\eta) = 0$ für die reelle Zahl $\eta = \zeta + \overline{\zeta}$. Nutzen Sie dieses, um zunächst $\frac{1}{2}\eta$ zu konstruieren.

(4 + 3 Punkte)

Bonus-Aufgabe W.9: Konstruieren Sie explizit einen Körper $\mathbb{F}$ mit 9 Elementen. Bestimmen Sie die Struktur der multiplikativen Gruppe $(\mathbb{F} - \{0\}, \cdot)$.

(4 Punkte)

Frohe Weihnachten!