Steilkurs Schemata WS13/14
Übungsaufgaben 31.10.13/zur Besprechung am 7.11.3

1. Sei R ein Ring, M ein R-Modul. Dann sind $\mathrm{Hom}_R(M, \cdot)$ und $\mathrm{Hom}_R(\cdot, M)$ linksexakt.

2. Sei R kommutativer Ring mit 1 und M ein R-Modul. Dann ist $\cdot \otimes_R M$ linksadjungiert zu $\mathrm{Hom}_R(M, \cdot)$.

3. Welche der folgenden Kategorien sind abelsch? Die Kategorie der abelschen Gruppen, die Kategorie der unitären kommutativen Ringe, die Kategorie der topologischen Räume, die Kategorie der Gruppen.

4. (Yoneda Einbettung) Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, X ein Objekt. Sei der kontravariante Funktor
$$F_X : \mathcal{C} \to \underline{\mathrm{Sets}}$$
definiert durch $Y \mapsto \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, X)$.
   (a) Für jeden Morphismus $X \to X'$ erhalten wir eine Transformation von Funktoren $F_X \to F_{X'}$. Zeigen Sie, dass diese Zuordnung eine Bijektion zwischen Morphismen und Transformationen von Funktoren definiert.
   (b) Benutzen Sie dies, um zu zeigen, dass F_X das Objekt X bis auf eindeutigen Isomorphismus festlegt.
   (c) Machen Sie die universelle Eigenschaft explizit.

5. Sei $\mathcal{C}$ eine kleine Kategorie, d.h. die Objekte bilden eine Menge. Sei $\mathrm{PSh}_{\mathcal{C}}$ die Kategorie der Prägarben von abelschen Gruppen, d.h. die Kategorie der kontravarianten Funktoren von $\mathcal{C}$ in die Kategorie von abelschen Gruppen. Zeigen Sie, dass $\mathrm{PSh}_{\mathcal{C}}$ abelsch ist.

6. Sei $\mathcal{C}$ eine abelsche Kategorie. Dann ist die Yoneda-Einbettung
$$\mathcal{C} \to \mathrm{PSh}_{\mathcal{C}}$$
exakt und volltreu. Formulieren Sie auch das Kriterium für Exaktheit in $\mathcal{C}$, das sich hieraus ergibt.

7. Benutzen Sie das obige, um zu zeigen, dass $\otimes_R M$ rechtsexakt ist.

8. Sei M ein Monoid, d.h. eine kommutative Halbgruppe. Die Gruppenkomplettierung M^+ hat als Erzeuger (als abelsche Gruppe) die Elemente von M mit allen Relationen aus M. Formulieren Sie eine universelle Eigenschaft.

9. Zeigen Sie: Die Gruppenkomplettierung ist linksadjungiert zur Inklusion der Kategorie der abelschen Gruppen in der Kategorie der kommutativen Halbgruppen.

A. Huber-Klawitter