Mathematisches Institut, Arithmetische Geometrie, Prof. Dr. Annette Huber–Klawitter

Probeklausur:	**"Analysis I" WS 2014/15**
Datum und Uhrzeit:	Dies ist lediglich eine Probeklausur zum Selbststudium
Prüfungsdauer:	3 Stunden
Raum:	-
Erlaubte Hilfsmittel:	1 handbeschriebenes DIN A4 Blatt
Prüfer:	Prof. Dr. Annette Huber–Klawitter

Nachname: ....

Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Fach: ....

Studiengang: ☐ Bachelor ☐ Master ☐ Lehramt ☐ sonstiges

Unterschrift: ....

Anmerkungen:

- Füllen Sie dieses Deckblatt vollständig aus.
- Zusätzliche Blätter sind nur einseitig zu beschreiben.
- Zusätzliche Blätter sind mit Namen und Matrikelnummer zu versehen.
- Für jede Aufgabe ist eine neue Seite/Bogen zu beginnen.
- Mobiltelefone müssen ausgeschaltet werden.
- Elektronische Hilfsmittel (Taschenrechner,...) jeglicher Art sind **nicht** zugelassen.
- **Alle Ergebnisse sind zu begründen bzw. herzuleiten.**

Prüfungsunfähigkeit

Durch den Antritt dieser Prüfung erklären Sie sich für prüfungsfähig. Sollten Sie sich während der Prüfung nicht prüfungsfähig fühlen, können Sie aus gesundheitlichen Gründen auch während der Prüfung von dieser zurücktreten. Gemäß der Prüfungsordnungen sind Sie verpflichtet, die für den Rücktritt oder das Versäumnis geltend gemachten Gründe unverzüglich (innerhalb von 3 Tagen) dem Prüfungsamt durch ein Attest mit der Angabe der Symptome schriftlich anzuzeigen und glaubhaft zu machen. Weiter Informationen hierzu können auf den Internetseiten des Prüfungsamtes nachgelesen werden.

	Max. Anzahl Punkte	Erreichte Punkte	Bemerkung
Aufgabe 1	-		
Aufgabe 2	-		
Aufgabe 3	-		
Aufgabe 4	-		
Aufgabe 5	-		
Summe:	–		

Note: ....

Klausur eingesehen am: ....

Unterschrift des Prüfers: ....

Aufgabe 1:
Beantworten Sie die folgenden Fragen mit Ja oder Nein und geben Sie nur eine knappe Begründung (ein oder zwei Sätze; kein vollständiges Argument!).

1. Existiert für jede Folge, deren Limes Superior existiert, auch deren Limes Inferior?

2. Ist jede konvergente Folge beschränkt?

3. Konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$?

4. Sei $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $f'(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Folgt dann, dass f konstant ist?

5. Ist jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar?

6. Ist jede stetige Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ beschränkt?

7. Existiert das Riemann-Integral $\int_1^{\infty} \frac{x^2}{\log x} \mathrm{d}x$?

8. Ist das vierte Taylorpolynom von $f(x) := \sin(x^2)$ bei $x_0 = 0$ gerade $T_4(x, 0) = x^2$.

Aufgabe 2:
Bestimmen Sie, ob die Grenzwerte existieren und wenn ja, bestimmen Sie den Grenzwert.

$$(a) \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\tan(x)^2}{1-\cos(x)} \qquad\qquad (b) \lim_{n \longrightarrow \infty} \left(\frac{n^3}{(n+1)^2} - \frac{n^3+1}{n^2} \right).$$

Aufgabe 3:
Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^3} x^{2n}.$$

Aufgabe 4:
Wir definieren eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \begin{cases} x\sin(x)^2 - x^2 & \text{für } x \geq 0 \\ x^3 - x^2 & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

Prüfen Sie, an welchen $x \in \mathbb{R}$ die Funktion f differenzierbar ist und bestimmen Sie die Ableitung.

Aufgabe 5:
Wir definieren die Funktion

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x}{2\pi} - \left[\dfrac{x}{2\pi} \right], \end{array}$$

wobei $[-]$ die Gaußklammer bezeichnet (d.h. $[x]$ ist die größte ganze Zahl kleiner gleich x). Zeigen Sie, dass die Funktion f 2π-periodisch ist. Bestimmen Sie die Fourier-Reihe von f.

Aufgabe 6: Wir betrachten die Funktion

$$\begin{array}{rcl} f : [0,\infty) & \longrightarrow & [0,\infty) \\ x & \longmapsto & x\exp(x). \end{array}$$

Zeigen Sie, dass die Funktion f differenzierbar ist und monoton wachsend. Beweisen Sie, dass f bijektiv ist und folgern Sie, dass f eine Umkehrfunktion $f^{-1} : [0,\infty) \to [0,\infty)$ besitzt.