Analysis I
Wintersemester 2014/15

Prof. Dr. Annette Huber-Klawitter

Fassung vom 9. Februar 2015

Dies ist ein Vorlesungsskript und kein Lehrbuch.
Mit Fehlern muss gerechnet werden!

Math. Institut
Eckerstr. 1
79104 Freiburg

0761-888 5495
annette.huber@math.uni-freiburg.de

Kapitel 0

Einleitung

Gegenstand der Vorlesung ist die Differential- und Integralrechnung in einer reellen Variablen. Es geht also um Funktionen

$$f : U \to \mathbb{R}$$

wobei $U \subset \mathbb{R}$. Sie kennen Beispiele wie

$$x \mapsto x^3 + 4,$$
$$x \mapsto \sin(x).$$

(Beachten Sie den Unterschied zwischen $\to$ und $\mapsto$!)
Das wichtigste Ergebnis ist der *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*, den Sie vermutlich bereits kennen: Integration und Differentiation sind zu einander invers.
Die wichtigste Definition ist der Begriff des *Grenzwertes.* Es hat historisch sehr lange gedauert, bis er geklärt war. Wir stellen Ihnen in der Vorlesung das Endergebnis dieses Prozesses vor. Bevor es losgehen kann, müssen wir aber eine sichere Grundlage herstellen: Was sind Funktionen? Was sind eigentlich reelle Zahlen?

Literatur

Die Vorlesung orientiert sich vor allem an den folgenden beiden Quellen:

- M. Barner, F. Flohr, Analysis I, de Gruyter Lehrbuch.
- O. Forster, Analysis 1, Vieweg Verlag.

Es gibt eine Vielzahl von alternativen Quellen mit typischem Titel "Analysis 1" oder "Differential- und Integralrechnung 1" oder "Infinitesimalrechnung 1". Interessant können Texte sein, die sich vor allem an Physiker wenden, da sie einen etwas anderen Blickwinkel mitbringen. Vorsicht mit Texten für Ingenieure, die meist weniger oder keine Beweise bringen und dafür mehr Rechnungen. Vorsicht auch bei englischen Texten. Die typische "Calculus"-Vorlesung in den USA behandelt zwar ähnlichen Stoff wie wir, aber eher auf dem Niveau der Oberstufe als der Universität. Sie können mit solchen Texten arbeiten, müssen sich jedoch der Diskrepanz bewusst sein.

Viele Definitionen und Resultate können Sie in Wikipedia (vor allem der englischen) nachlesen. Aber Vorsicht, die Qualität der Artikel variiert. Das gilt ebenso für alle anderen Online-Quellen. Viele Skripte von Vorlesungen sind online abrufbar, auch von Freiburger Kollegen. Solche Materialien sind sehr hilfreich, müssen aber kritisch gelesen werden. Das gilt auch für diese Skript!

Kapitel 1

Reelle Zahlen

Unser erstes Ziel ist eine axiomatische Beschreibung der reellen Zahlen. Wir verzichten zunächst auf den Existenzbeweis, sondern geben genau an, mit welchen Eigenschaften wir arbeiten wollen.

Davor wollen wir uns noch auf einige sprachliche Dinge einigen.

Mengen und Aussagenlogik

Es ist Gegenstand der *Mengenlehre* zu diskutieren, was Mengen eigentlich sind. Wir stehen auf einem etwas naiveren Standpunkt.

Mengen haben *Elemente*, in Symbolen $x \in M$, lies "x ist Element von M". Zwei Mengen sind gleich, wenn sie diesselben Elemente haben, d.h. es ist $M = N$ genau dann, wenn $x \in M$ äquivalent ist zu $x \in N$. Wir können eine Menge definieren, in dem wir sie aufzählen oder indem wir sie durch eine Eigenschaft definieren. Auf Reihenfolge und Wiederholungen kommt es dabei nicht an.

Beispiel.

$$M = \{1, 2, 3, 4\}, \qquad M = \{x|\ x \text{ ist gerade Zahl}\}$$

sind Mengen. Es gilt

$$\{1, 2\} = \{1, 1, 2\} = \{2, 1\}.$$

Seien M, N Mengen. Wir definieren

(i) *Teilmenge* $N \subset M$, d.h. jedes Element von N liegt auch in M (Gleichheit erlaubt!)

(ii) die *Schnittmenge* $M \cap N = \{x \in M | x \in N\}$ (lies: die Menge der x in M mit $x \in N\}$;

(iii) die *Vereinigungsmenge* $M \cup N = \{x | x \in M \text{ oder } x \in M\}$ (dabei ist erlaubt, dass x in beiden liegt!);

(iv) das *Produkt* $M \times N = \{(m, n)|m \in M, n \in N\}$ als die Menge der geordeneten Paare.

Bemerkung. Viele Texte schreiben $\subseteq$ statt $\subset$ und meinen mit $\subset$ "Teilmenge, aber ungleich". Wir schreiben dafür $\subsetneq$.

Beispiel. (i) Sei M die Menge der ganzen Zahlen, N die Menge der geraden ganzen Zahlen. Dann ist $N \subset M$.

(ii) Sei M die Menge der geraden Zahlen, N die Menge der durch 3 teilbaren ganzen Zahlen. Dann ist $M \cap N$ die Menge der durch 6 teilbaren Zahlen.

(iii) Sei $M = \{1, 2, 3\}$, $N = \{4, 5\}$. Dann ist

$$M \times N = \{(1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5)\}$$

Sind P und Q Aussagen, so sagen wir

(i) P und Q (Notation: $P \wedge Q$): beide Aussagen gelten gleichzeitig

(ii) P oder Q (Notation: $P \vee Q$): mindestens eine der Aussagen gilt

(iii) P impliziert Q, Q folgt aus P (Notation: $P \Rightarrow Q$, $Q \Leftarrow P$): wenn P gilt, dann auch Q

(iv) P ist äquivalent zu Q, P wenn und nur wenn Q: (Notation: $P \Leftrightarrow$): P gilt genau dann, wenn Q gilt)

(v) Die Negation von P (Notation: $\neg P$) ist das genaue Gegenteil, d.h. nicht-P gilt genau dann, wenn P nicht gilt.

Beispiel. (i) Sei P die Aussage "x ist gerade". Sei Q die Aussage "x ist durch 3 teilbar". Dann erfüllt 6 die Aussage "P und Q". Die Zahlen $2, 3, 6$ erfüllen die Aussage "P oder Q".

(ii) Sei P die Aussage "A ist ein Quadrat", Q die Aussage "A ist ein Rechteck". Dann gilt "$P \Rightarrow Q$", aber nicht "$P \Leftrightarrow Q$".

(iii) Sei P die Aussage "alle ganzen Zahlen sind gerade". Die Negation ist: "es gibt eine ganze Zahl, die nicht gerade ist".

Bemerkung. Schreiben Sie nie $\Leftrightarrow$, wenn Sie $\Rightarrow$ meinen! Das ist oft falsch, und ein überflüssiger Fehler.

Im letzten Beispiel tauchten bereits die *Quantoren* "für alle" (Notation: $\forall$ und "es gibt" (Notation: $\exists$) auf. Diese müssen sorgfältig auseinander gehalten werden!

Zahlen

Wir bezeichnen die verschiedenen Mengen von Zahlen wie folgt:

(i) $\mathbb{N}$ die Menge der *natürlichen Zahlen*, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

(ii) $\mathbb{N}_0$ die Menge der natürlichen Zahlen einschließlich 0.

(iii) $\mathbb{Z}$ die Menge der *ganzen Zahlen*, $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$.

(iv) $\mathbb{Q}$ die Menge der *rationalen Zahlen*, $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} | a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}\}$

(v) $\mathbb{R}$ die Menge der *reellen Zahlen* (siehe unten)

(vi) $\mathbb{C}$ die Menge der *komplexen Zahlen* (siehe unten)

Wir gehen fürs erste davon aus, dass die Eigenschaften der ganzen und rationalen Zahlen bekannt sind. Komplexe Zahlen führen wir ein, sobald wir sie verwenden wollen.

Reelle Zahlen

Die reellen Zahlen sind Ihnen vermutlich als "unendliche Dezimalbrüche" bekannt.

Beispiel. $\sqrt{3}, \pi \in \mathbb{R}$

Da gar nicht klar ist, was das eigentlich sein soll, gehen wir anders vor.

Definition 1.1. *Die* reellen Zahlen *bestehen aus einer Menge* $\mathbb{R}$ *zusammen mit zwei Verknüpfungen*

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

genannt Addition und Multiplikation und einer totalen Ordnung $\leq$*, so dass die Axiome K1-K9, A1-A3, das arichimedische Axiom und das Supremumsaxiom erfüllt sind.*

Diese Axiome diskutieren wir nun im Detail.

Die Körperaxiome

Die Addition $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x + y$ erfüllt die Rechenregeln:

(K1) *Assoziativgesetz*: Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt

$$x + (y + z) = (x + y) + z.$$

(K2) *Kommutativgesetz*: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$x + y = y + z.$$

(K3) *Existenz der Null*: Es gibt ein Element $0 \in \mathbb{R}$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$0 + x = x + 0 = x.$$

(K4) *Existenz des additiven Inversen*: Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein Element $y \in \mathbb{R}$ mit

$$x + y = 0.$$

Diese Axiome habe eine Reihe Konsequenzen.

Satz 1.2. *(i) Das Element 0 in K3 ist eindeutig.*

(ii) Sei $x \in \mathbb{R}$. Das additive Inverse y in K4 ist eindeutig. Wir nennen es $-x$.

(iii) Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gibt es genau ein $x \in \mathbb{R}$, das die Gleichung

$$a + x = b$$

erfüllt.

(iv) Sei $a \in \mathbb{R}$. Dann ist $-(-a) = a$.

Beweis: Seien 0 und $0'$ zwei reelle Zahlen, die neutrales Element der Addition sind. Da 0 neutrales Element ist, gilt

$$0 + 0' = 0'.$$

Da $0'$ neutrales Element ist, gilt

$$0 + 0' = 0.$$

Zusammen erhalten wir

$$0 = 0 + 0' = 0'.$$

Sei $x \in \mathbb{R}$. Seien $y, y' \in \mathbb{R}$ additive Inverse. Nach Voraussetzung gilt

$$x + y = 0.$$

Wir addieren auf beiden Seiten y' und erhalten

$$y' + (x + y) = y' + 0.$$

Wir wenden auf der linken Seite K1 (Assoziativität) an und auf der rechten K3 (Definition von 0). Dies ergibt

$$(y' + x) + y = y'.$$

Nach Voraussetzung ist $y' + x = 0$. Dies setzen wir ein und wenden wieder K3 (Definition von 0) an:
$$y = 0 + y = y'.$$
Das ist die zweite Behauptung.
Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Wir betrachten
$$a + x = b.$$
Die Gleichung hat die Lösung $x = (-a) + b$, denn
$$a + ((-a) + b) = (a + (-a)) + b = 0 + b = b$$
mit den Axiomen K1, K4, K3. Wir zeigen nun die Eindeutigkeit der Lösung. Sei also x eine Lösung. Wir addieren $(-a)$ auf beiden Seiten und erhalten
$$(-a) + (a + x) = (-a) + b.$$
Auf der linken Seite rechnen wir weiter mit K1, K4 und K3:
$$(-a) + (a + x) = ((-a) + a) + x = 0 + x = x.$$
Zusammen haben wir
$$x = (-a) + b.$$
Die Lösung ist eindeutig.
Sei schließlich $a \in \mathbb{R}$. Dann ist a das additive Inverse von $-a$, denn $a + (-a) = 0$. □

Bemerkung. Wegen des Assoziativgesetzes kommt es in mehrfachen Additionen nicht auf die Klammerung an, z.B.
$$(a + b) + (c + d) = ((a + b) + c) + d.$$
Wir schreiben daher einfach
$$a + b + c + d.$$

Die Multiplikation $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto xy$ erfüllt die Rechenregeln:

(K5) *Assoziativgesetz*: Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt
$$(xy)z) = x(zy).$$

(K6) *Kommutativgesetz*: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt
$$xy = xy.$$

(K7) *Existenz der Eins*: Es gibt ein Element $1 \in \mathbb{R}$, $1 \neq 0$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt
$$1 \cdot x = x \cdot 1 = x.$$

(K8) *Existenz des multiplikativen Inversen*: Für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$ gibt es ein $y \in \mathbb{R}$ mit
$$xy = 1.$$

(K9) *Distributivgesetz*: Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt
$$x(y + z) = (xy) + (xz).$$

Bemerkung. Wegen des Assoziativgesetzes kommt es in mehrfachen Multiplikationen nicht auf die Klammerung an, daher lassen wir sie weg. Wir verabreden "Punkt vor Strichrechnung" und schreiben $xy + z$ für $(xy) + z$.

Satz 1.3. *(i) Das Element* 1 *in K7 ist eindeutig.*

(ii) Sei $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$. *Das multiplikative Inverse* y *in K4 ist eindeutig. Wir nennen es* x^{-1} *oder* $\frac{1}{x}$.

(iii) Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. *Dann gibt es genau ein* $x \in \mathbb{R}$, *das die Gleichung*
$$ax = b$$
erfüllt. Wir schreiben $\frac{a}{b}$ *für* ab^{-1}.

(iv) Für alle $x \in \mathbb{R}$ *gilt* $0x = 0$.

(v) Für alle $x \in \mathbb{R}$ *ist* $(-1)x = -x$.

(vi) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ *gilt*
$$-(xy) = (-x)y = x(-y), \qquad (-x)(-y) = xy.$$

Beweis: Die ersten drei Aussagen folgen genau wie für $+$. Wir behandeln die übrigen. Wir schreiben $0 = 0 + 0$. Nach dem Distributivgesetz gilt für jedes $x \in \mathbb{R}$
$$0x = (0 + 0)x = 0x + 0x.$$
Wir addieren $-(0x)$ und erhalten nach K4 und K3
$$0 = -(0x) + 0x = -(0x) + 0x + 0x = 0 + 0x = 0x.$$
Nun betrachten wir $0 = (-1) + 1$ und wenden wieder das Distributivgesetz an:
$$0x = ((-1) + 1)x = (-1)x + 1x.$$
Die linke Seite haben wir bereits berechnet und nach Definition ist $1x = x$. Also haben wir:
$$0 = 0x = (-1)x + 1x = (-1)x + x.$$
Wir addieren auf beiden Seiten $-x$ und erhalten nach K4
$$-x = (-1)x + x + (-x) = (-1)x + 0 = (-1)x.$$

Sei nun $x, y \in \mathbb{R}$. Wir haben nach (v) und dem Assoziativgesetz

$$-(xy) = (-1)xy = ((-1)x)y = (-x)y.$$

Die zweite Gleichheit folgt mit dem Kommutativitätsgesetz. Wir erhalten daraus

$$(-x)(-y) = -(x(-y)) = -(-(xy)) = xy.$$

□

Ab jetzt müssen wir nicht mehr zwischen $-x$ und $(-1)x$ unterscheiden.
Eine Menge K mit Verknüpfungen $+$ und $\cdot$, die die Axiome K1-K9 erfüllt, heißt *Körper*. Wir können also kurz sagen: $\mathbb{R}$ ist ein Körper.

Beispiel. Die rationalen Zahlen sind ein Körper.

Weitere Beispiele lernen Sie in der linearen Algebra kennen.

Die Anordnungsaxiome

In $\mathbb{R}$ sind gewissen Elemente als *positiv* gekennzeichnet (Notation: $x > 0$), so dass die folgenden Axiome erfüllt sind:

(A1) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der Aussagen $x = 0$, $x > 0$ oder $-x > 0$.

(A2) Sind $x > 0$ und $y > 0$, so gilt $x + y > 0$.

(A3) Sind $x > 0$ und $y >$, so gilt $xy > 0$.

Wir schreiben $x > y$, falls $x - y > 0$. Wir schreiben $x \geq y$, falls $x > y$ oder $x = y$. Statt $x > y$ schreiben wir auch $y < x$, genauso für $\leq$.

Satz 1.4. *Seien $x, y, z, x', y' \in \mathbb{R}$.*

(i) $x < 0$ ist äquivalent zu $-x > 0$.

(ii) (Transitivität) Sind $x > y$ und $y > z$, so folgt $x > z$.

(iii) Aus $x > y$ folgt $x + z > y + z$ für alle $z \in \mathbb{R}$.

(iv) Aus $x > y$ und $x' > y'$ folgt $x + x' > y + y'$.

(v) Aus $x > y$ und $z > 0$ folgt $xz > yz$.

(vi) $x > y \geq 0$ und $x' > y' \geq 0$ folgt $xx' > yy'$.

(vii) Aus $x > y$ und $z < 0$ folgt $xz < yz$.

(viii) Für alle $x \neq 0$ gilt $x^2 > 0$.

(ix) Für $x > 0$ ist $x^{-1} > 0$. Für $x < 0$ ist $x^{-1} < 0$.

(x) *Aus* $x > y > 0$ *folgt* $x^{-1} < y^{-1}$.

(xi) $1 > 0$.

Beweis: (i) Nach Definition bedeutet $0 > x$, dass $0 - x > 0$.

(ii) Nach Voraussetzung gilt $x - y > 0$ und $y - z > 0$, also

$$x - z = x - y + y - z = (x - y) + (y - z) > 0$$

nach Axiom A2.

(iii) Nach Voraussetzung gilt $x - y > 0$. Hieraus folgt mit Assoziativitäts- und Kommutativitätsgesetz

$$(x + z) - (y + z) = x - y + z - z = x - y > 0.$$

Nach Definition ist also $x + z > y + z$.

(iv) Nach Voraussetzung ist $x - y > 0$ und $x' - y' > 0$. Hieraus folgt mit Assoziativ- und Kommutativgesetz

$$(x + x') - (y + y') = (x - y) + (x' - y') > 0$$

nach A2.

(v) Nach Voraussetzung gilt $x - y > 0$ und $z > 0$. Hieraus folgt mit dem Distributivgesetz

$$xz - yz = (x - y)z > 0$$

nach A3.

(vi) Ist $y = 0$ oder $y'0$, so lautet die Behauptung $xx' > 0$ und dies gilt nach A3. Sei nun $y, y' > 0$. Durch Anwenden von (v) erhalten wir $xx' > yx'$ und $yx' > y'x'$. Wegen Transitivität (Eigenschaft (ii)) folgt die Behauptung.

(vii) Aus $x - y > 0$ und $-z > 0$ folgt mit A3, Assoziativitäts- und Kommutativitätsgesetz, sowie Satz 1.3 (vi)

$$yz - xz = (-y)(-z) + x(-z) = (-z)(x - y),$$

also $yz > xz$.

(viii) Für $x > 0$ ist dies A3. Für $0 > x$ wenden wir (vii) an mit $z = x$.

(ix) Es ist $x^{-1} = x(x^{-1})^2$. Hierin ist der zweite Faktor positiv nach (viii). Sei $x > 0$. Die Aussage folgt aus A3. Sei $x < 0$. Dann folgt die Aussage aus (vii).

(x) Wegen $x, y > 0$ folgt mit A3 $xy > 0$. Nach (ix) ist dann auch $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1} > 0$. Wir wenden A3 an auf $x > y$ und $z = (xy)^{-1}$ und erhalten

$$y^{-1} = y^{-1}xx^{-1}y^{-1} > yx^{-1}y^{-1} = x^{-1}.$$

(xi) Wegen $1 = 1^2$ ist dies ein Spezialfall von (viii).

□

Körper mit einer Ordnung $>$ mit den Eigenschaften A1-A3 heißen *total geordnet.*

Beispiel. $\mathbb{Q}$ ist total geordnet.

Das archimedische Axiom

Wir betten nun die natürlichen Zahlen in die reellen ein. Wir haben bereits die Elemente $0, 1, -1 \in \mathbb{R}$. Wir *definieren* $2 \in \mathbb{R}$ als die Summe $1 + 1$, $3 \in \mathbb{R}$ als $2 + 1$, etc. Für negative Zahlen $-2 = (-1)2$ etc.

Bemerkung. Um daraus eine saubere Definition zu formulieren, benötigen wir das Prinzip der vollständigen Induktion, auf das wir noch zu sprechen kommen.

Archimedisches Axiom. Für $x, y > 0$ gibt eine natürliche Zahl n mit $nx > y$.

Bemerkung. Das archimedische Axiom lässt sich *nicht* aus den bisherigen Eigenschaften herleiten! Ein Gegenbeispiel sind die *nichtstandard* rationalen oder reellen Zahlen, siehe "Zahlen", Herausgeber Ebbinghaus u.a., Grundwissen Mathematik 1, Springer Verlag 1983. In diesen Zahlbereichen gibt es unendlich große Zahlen - solche die größer als alle natürlichen Zahlen sind.

Als Spezialfall erhalten wir: zu jedem $x > 0$ gibt es eine natürliche Zahl n mit $n > x$.

Das Vollständigkeitsaxiom

Das letzte Axiom unterscheidet nun endlich $\mathbb{Q}$ von $\mathbb{R}$. Es sorgt dafür, dass Grenzwerte existieren. Wir wählen eine Formulierung, in der noch nicht die Rede von Grenzwerten ist.

Definition 1.5. *Sei $S \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge. Die Menge S heißt* nach oben beschränkt*, wenn es ein $C \in \mathbb{R}$ gibt mit $s \leq C$ für alle $s \in S$. Die Zahl C heißt dann* obere Schranke *von S. Die Menge S heißt* nach unten beschränkt*, wenn es ein $C' \in \mathbb{R}$ gibt mit $x \geq C'$ für alle $s \in S$. Die Zahl C' heißt dann* untere Schranke *von S. Die Menge S heißt* beschränkt*, wenn sie nach oben und nach unten beschränkt ist.*

Eine Zahl C_0 heißt kleinste obere Schranke *oder* Supremum *von S, wenn sie kleiner oder gleich jeder oberen Schranke ist. Wir schreiben $C_0 = \sup(S)$. Eine Zahl C_0' heißt* größte untere Schranke *oder* Infimum *von S, wenn sie größer oder gleich jeder unteren Schranke ist. Wir schreiben $C_0' = \inf(S)$.*

Bemerkung. Die obere Schranke oder das Supremum brauchen nicht in S zu liegen!

Beispiel. Die Menge $\{x \in \mathbb{R} | x < 0\}$ hat jede positive reelle Zahl als obere Schranke. Das Supremum ist 0. Sie ist nicht nach unten beschränkt. Die Menge $\{-4, -3, -2, -1\}$ hat das Supremum -1 und das Infimum -4. Sie ist beschränkt.

Supremumsaxiom. Sei $S \subset \mathbb{R}$ eine nicht-leere, nach oben beschränkte Teilmenge. Dann hat S ein Supremum.

Das Supremumsaxiom ist äquivalent zum Vollständigkeitsaxiom, dass wir später kennenlernen werden. In der Literatur gehen die Namen daher durcheinander.

Bemerkung. Wir haben damit alle Axiome für Definition 1.1 formuliert. Die Existenz und Eindeutigkeit von $\mathbb{R}$ sind ein Satz. Wir verzichten auf den Beweis, wenigstens fürs erste. Alle unsere Sätze gelten für $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, die die Axiome erfüllen. Das ist ein mathematisch korrekter Standpunkt.

Beispiel. Die Menge $\{x \in \mathbb{Q} | x^2 < 2\}$ hat kein Supremem in $\mathbb{Q}$, denn $\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl. Die rationalen Zahlen erfüllen das Supremumsaxiom nicht.

Satz 1.6. *Sei $d > 0$ reell. Dann ist die Gleichung $x^2 = d$ in $\mathbb{R}$ lösbar. Mit anderen Worten: Quadratwurzeln aus positiven Elementen existieren.*

Beweis: Wir betrachten

$$s = \sup(S), \qquad S = \{x \in \mathbb{R}; x^2 \leq d\} \ .$$

Das Supremum existiert nach dem Vollständigkeitsaxiom, da $0^2 \leq d$, d.h. die Menge ist nicht leer und $n^2 > d$ für eine natürliche Zahl $n > d$ (d.h. die Menge ist nach oben beschränkt). Diese existiert wiederum nach dem archimedischen Axiom. Wir wollen nun zeigen:

$$s^2 = d$$

Angenommen, $s^2 > d$. Sei

$$\varepsilon = \frac{s^2 - d}{2s} > 0 \ .$$

Dann ist

$$(s - \varepsilon)^2 = s^2 - 2s\varepsilon + \varepsilon^2 = s^2 - s^2 + d + \varepsilon^2 > d \ .$$

Damit ist $s - \varepsilon$ ebenfalls eine obere Schranke von S, ein Widerspruch dazu, dass s die kleinste obere Schranke ist.
Angenommen, $s^2 < d$. Wir betrachten $\delta = d - s^2 > 0$. Wir wählen $\varepsilon > 0$ mit

$$\varepsilon < 2s, \ \varepsilon < \frac{\delta}{4s}$$

Dies ist möglich, denn nach dem archimedischen Axiom gibt es eine natürliche Zahl $n > 1/2s$ und gleichzeitig $n > 4s/\delta$. Dann erfüllt $\varepsilon = 1/n$ die beiden Bedingungen.
Damit folgt

$$(s + \varepsilon)^2 = s^2 + 2s\varepsilon + \varepsilon^2 < s^2 + 2s\varepsilon + 2s\varepsilon < s^2 + 4s\frac{\delta}{4s} = s^2 + d - s^2 = d$$

Also ist $s + \varepsilon \in S$. Dies ist ein Widerspruch dazu, dass s eine obere Schranke von S ist.
Es bleibt nur die Möglichkeit $s^2 = d$, d.h. $s = \sqrt{d}$. $\square$

Komplexe Zahlen

Definition 1.7. *Die* komplexen Zahlen *bestehen aus der Menge* $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ *mit der Addition*

$$+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad ((x_1, y_2), (x_2, y_2)) \mapsto (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

und der Multiplikation

$$\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad ((x_1, y_2), (x_2, y_2)) \mapsto (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1).$$

Wir betrachten $\mathbb{R}$ *als Teilmenge von* $\mathbb{C}$ *via der Abbildung*

$$\mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad x \mapsto (x, 0).$$

Wir definieren

$$1 = (1, 0) \quad i = (0, 1).$$

Für komplexe Zahlen ist der Buchstabe z üblich.

Satz 1.8. *Die komplexen Zahlen erfüllen die Körperaxiome K1-K9. Die Einbettung von* $\mathbb{R}$ *nach* $\mathbb{C}$ *ist verträglich mit Addition und Multiplikation. Jede komplexe Zahl lässt sich eindeutig schreiben als*

$$z = x + iy$$

mit $x, y \in \mathbb{R}$. *Die Multiplikation ist eindeutig festgelegt durch die Assoziativität, Kommutativität, Distributivgesetze und die Rechenregel* $i^2 = -1$.

Bemerkung. In der Sprache der linearen Algebra: $\mathbb{C}$ ist ein zweidimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit der Basis $1, i$.

Beweis: Die Eigenschaften der Addition sind ganz einfach, z.B. das Assoziativgesetz: Seien $z_i = (x_i, y_i)$ für $i = 1, 2, 3$. Dann ist

$$\begin{aligned}(z_1 + z_2) + z_2 &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) + (x_3, y_3) = ((x_1 + x_2) + x_3, (y_1 + y_2) + y_3) \\ &= (x_1 + (x_2 + x_3), y_1 + (y_2 + y_3)) = z_1 + (z_2 + z_3))\end{aligned}$$

mit dem Assoziativgesetz in $\mathbb{R}$. Das neutrale Element ist $(0, 0)$, das additive Inverse von (x, y) ist $(-x, -y)$.
Die Einbettung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{C}$ ist offensichtlich mit der Addition verträglich. Beim Multiplizieren einer reellen Zahl mit einer komplexen erhalten wir

$$x \cdot z' = (x, 0)(x', y') = (xx' - 0, xy' + 0) = (xx', xy')\ .$$

Insbesondere ist die Einbettung mit der Multiplikation verträglich. Wir erhalten $xi = (0, x)$ und daher

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = x + iy.$$

Daher hat jede komplexe Zahl eine eindeutige Darstellung in der angegebenen Form. Nun überprüfen wir die Rechenregeln der Multiplikation. Sie ist offensichtlich kommutativ. Es gilt

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (0 - 1 \cdot 1, 0 + 0) = -1.$$

Die allgemeine Formel deutet sich als

$$\begin{aligned}(x, y)(x', y') &= (x + iy)(x' + iy) = xx' + xiy' + iyx' + iyiy' \\ &= xx' - yy' + i(xy' + yx') = (xx' - yy', xy' + x'y).\end{aligned}$$

Distributiv- und Assoziativgesetz rechnen sich jetzt leicht nach. Neutrales Element ist 1. Sei $z = (x, y) \neq 0$. Wir definieren $z' = \frac{1}{x^2+y^2}(x, -y)$. Dies ist wohldefiniert, da $x \neq 0$ oder $y \neq 0$. Dann ist

$$zz' = \frac{1}{x^2 + y^2}(x + iy)(x - iy) = \frac{1}{x^2 + y^2}(x^2 - (-1)y^2) = 1.$$

Daher existieren multiplikative Inverse. □

Bemerkung. Im Unterschied zu den reellen Zahlen lassen sich die komplexen *nicht* anordnen. Aus den Axiomen hatten wir hergeleitet $1 > 0 \Rightarrow -1 < 0$, aber $-1 = i^2$ müsste positiv sein.

Bemerkung. Über den komplexen Zahlen ist jede quadratische Gleichung lösbar (Übungsaufgabe). Tatsächlich gilt noch viel stärker der *Fundamentalsatz der Algebra*: Jede Polynomgleichung wie $x^{17} + 12x^2 - \pi x + i$ mit komplexen Koeffizienten hat eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

Im Beweis haben wir bereits eine nützliche Operation benutzt.

Definition 1.9. *Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Dann heißt $\overline{z} = x - iy$ die* komplex Konjugierte *zu z. Wir definieren den* Betrag *von z als*

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

(Dies ist wohldefiniert, da Quadratwurzeln von positiven reellen Zahlen existieren.)

Speziell für $z \in \mathbb{R}$ erhalten wir daher:

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0, \\ -x & x < 0. \end{cases}$$

Bemerkung. Die Formel für z^{-1} leitet man her als

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

Lemma 1.10. *Für alle $z, z' \in \mathbb{C}$ gilt:*

(i) *(Definitheit) Es ist $|z| = 0$ genau dann, wenn $z = 0$.*

(ii) $|z| = |-z|$.

(iii) *(Multiplikativität der Konjugation)* $\overline{zz'} = \overline{z}\overline{z'}$.

(iv) *(Multiplikativität des Betrags)* $|zz'| = |z| \cdot |z'|$.

(v) $\left|\frac{z}{z'}\right| = |z||z'|^{-1}$ *falls* $z' \neq 0$.

(vi) *(Dreiecksungleichung)* $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.

(vii) $|z - z'| \geq |z| - |z'|$.

Beweis: Eigenschaft (i) und (ii) sind klar.
Zu (iii): Sei $z = x + iy, z' = x' + iy'$. Dann gilt

$$\overline{zz'} = \overline{xx' - yy' + i(xy' + x'y)} = xx' - yy' - i(xy' + x'y) = \overline{z}\overline{z'}$$

Hieraus folgt sofort (iv).
Sei $w = z/z'$. Dann gilt nach (iv):

$$|z| = |wz'| = |w||z'|.$$

Wir multiplizieren mit $|z|^{-1}$ und erhalten (v).
Für die Dreiecksungleichung qudadrieren wir beide Seiten. Wir berechnen

$$|z + z'|^2 = (x + x')^2 + (y + y')^2 = x^2 + 2xx' + x'^2 + y^2 + 2yy' + y'^2$$

und

$$(|z|+|z'|)^2 = (\sqrt{x^2 + y^2}+\sqrt{x'^2 + y'^2})^2 = x^2+y^2+2\sqrt{(x^2 + y^2)(x'^2 + y'^2)}+x'^2+y'^2.$$

Die Behauptung ist also äquivalent zu

$$2xx' + 2yy' \leq 2\sqrt{(x^2 + y^2)(x'^2 + y'^2)}.$$

Die Aussage ist wahr, falls die linke Seite negativ ist. Andernfalls dürfen wir sie nach Quadrieren testen, also ob

$$x^2x'^2 + 2xx'yy' + y^2y'^2 \leq (x^2 + y^2)(x'^2 + y'^2) = x^2x'^2 + x^2y'^2 + y^2x'^2 + y^2y'^2$$
$$\Leftrightarrow$$
$$0 \leq -2xx'yy' + x^2y'^2 + y^2x'^2 = (xy' - yx')^2.$$

Dies beweist die Dreiecksungleichung.
Sei $v = z + z'$ und $w = -z'$. Dann gilt nach der Dreiecksungleichung

$$|z| = |v + w| \leq |v| + |w| = |z + z'| + |z'|.$$

Dies ist die letzte Formel. □

Die Dreiecksungleichung hat ihren Namen, da es um die Längen der Seiten eines Dreicks geht (Skizze). Die Summe zweier Länge zweiter Seiten ist größer als die dritte.

Vollständige Induktion

Wir beschäftigen uns noch näher mit den *natürlichen Zahlen*
Das Beweisprinzip der vollständigen Indution besagt das Folgende:
Sei $M \subset \mathbb{N}$ eine Teilmenge mit den Eigenschaften:

(i) $1 \in M$.

(ii) Falls $n \in M$, dann liegt $n + 1$ in M.

Dann ist $M = \mathbb{N}$.
Wir benutzen dies in Beweisen, um Aussagen für alle natürlichen Zahlen zu zeigen, in der folgenden Form:
Um eine Aussage $A(n)$ für jede natürliche Zahl n zu beweisen, genügt es zu zeigen:

(i) $A(1)$ gilt (*Induktionsanfang*)

(ii) Falls $A(n)$ gilt (*Induktionsvoraussetzung*), dann gilt auch $A(n+1)$ (*Induktionsschritt*).

Das Beweisschema folgt aus dem Prinzip, in dem man die Menge

$$M = \{n \in \mathbb{N} | A(n) \text{ wahr } \}$$

betrachtet.

Bemerkung. Das Prinzip der vollständigen Induktion ist Teil der Peano Axiome, durch die die natürlichen Zahlen definiert werden.

Wir werden nun beispielhaft einige Aussagen mit vollständiger Induktion beweisen.

Lemma 1.11 (Bernoullische Ungleichung)**.** *Sei $a > -1$ reell und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$(1 + a)^n \geq 1 + na.$$

Ein Lemma ist ein Hilfssatz oder ein kleiner Satz. Manche Lemmata sind aber auch sehr berühmt oder sogar Axiome ...

Beweis: Wir argumentieren mit vollständiger Induktion.
Für $n = 1$ lautet die Aussage

$$1 + a \geq 1 + a,$$

ist also wahr. (Induktionsanfang)
Angenommen, die Aussage gilt für eine natürliche Zahl n (Induktionsvoraussetzung). Dann gilt

$$(1 + a)^{n+1} = (1 + a)(1 + a)^n \geq (1 + a)(1 + na)$$

nach Induktionsvoraussetzung und Satz 1.4 (v) da $1 + a > 0$. Weiter gilt

$$(1 + a)(1 + na) = 1 + (n + 1)a + a^2 \geq 1 + (n + 1)a$$

nach Satz 1.4 (viii). Zusammen gilt also

$$(1 + a)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)a.$$

Dies ist die Induktionsbehauptung. Das Lemma folgt nach dem Prinzip der vollständigen Induktion. □

Lemma 1.12. *Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist die Summe der ersten n ungeraden Zahlen gleich n^2, d.h.*

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2.$$

Beweis: Induktionsanfang: Für $n = 1$ gilt die Aussage, da $1 = 1^2$.
Induktionsvoraussetzung: Die Aussage gelte für n. Induktionsbehauptung:

$$1 + 3 + \cdots + (2n - 1) + (2n + 1) = (n + 1)^2$$

Induktionsschritt: Wir berechnen mit Induktionsvoraussetzung und binomischer Formel

$$[1 + \ldots (2n - 1)] + (2n + 1) = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2.$$

Mit vollständiger Induktion ist die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen. □

Wir führen eine abkürzenden Schreibweise ein.

Definition 1.13. *Seien $a_1, \ldots, a_n$ reelle Zahlen. Dann schreiben wir*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

$$\prod_{i=} 1^n a_i = a_1 a_2 \ldots a_n$$

Lies: Die Summe (bzw. Produkt) der Zahlen a_i für $i = 1$ bis n bzw. Das

Hierbei steht $\sum$ für Σ und $\prod$ für Π. In dieser Notation besagt das Lemma:

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2.$$

Lemma 1.14 (Geometrische Reihe)**.** *Sei $q \neq 1$. Dann gilt*

$$\sum_{i=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Beweis: Für $n = 0$ lautet die Aussage

$$q^0 = 1 = \frac{1-q^1}{1-q}.$$

Daher gilt der Induktionsanfang.

Wir nehmen nun an, dass die Behauptung für n gilt und betrachten $n+1$. Es gilt

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n+1} q^i = \sum_{i=0}^{n} q^i + q^{n+1} &= \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + \frac{(1-q)q^{n+1}}{1-q} \\ &= \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + \frac{q^{n+1}-q^{n+2}}{1-q} = \frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}-q^{n+2}}{1-q} \\ &= \frac{1-q^{n+2}}{1-q}.\end{aligned}$$

Dies ist die Induktionsbehauptung. Mit vollständiger Induktion gilt die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}_0$. □

In diesem Beispiel wurde also der Induktionsanfang auf $n = 0$ statt $n = 1$ gelegt. Genauso ist es möglich, Aussagen für alle $n \geq n_0$ zu zeigen, wobei der Induktionsanfang dann n_0 ist.

Es gibt auch einen direkten Beweis, bei dem man den Gebrauch des Summenzeichens schön sieht.

2. Beweis der Summenformel für die geometrische Reihe.

$$(1-q)\sum_{i=0}^{n} q^i = \sum_{i=0}^{n} q^i - \sum_{i=0}^{n} q^{i+1} = \sum_{i=0}^{n} q^i - \sum_{i=1}^{n+1} q^i$$

Hier bleiben nur der Summand für $i = 0$ in der ersten Summe und der für $i = n+1$ in der zweiten stehen. Zusammen:

$$(1-q)\sum_{i=0}^{n} = q^0 - q^{n+1} = 1 - q^{n+1}.$$

Da $q \neq 1$, können wir durch $1-q$ teilen und erhalten die Behauptung. □

Für die letzte Formel führen wir die *Binomialkoeffizienten* ein.

Definition 1.15. *(i) Für $n \in \mathbb{N}$ sei*

$$n! = \prod_{i=1}^{n} i$$

(lies: n Fakultät). Für $n = 0$ setzen wir $0! = 1$.

(ii) Für $n \geq k \geq 0$ in $\mathbb{N}$ sei

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$$

(lies: n über k)

Lemma 1.16. *Für $n \geq k \geq 0$ gilt*

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \quad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

und für $n \geq 1$

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}.$$

Beweis: Die ersten Aussage folgen sofort aus der Definition. Die letzte rechnen wir nach:

$$\begin{aligned}\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{k \cdot n!}{k!(n-k+1)!} + \frac{(n-k+1)n!}{k!(n-k+1)!} \\ &= \frac{(k+n-k+1)n!}{k!(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}\end{aligned}$$

□

Satz 1.17 (Binomische Formel)**.** *Für $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{k} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Beweis: Wir argumentieren mit vollständiger Induktion. Für $n = 0$ erhalten wir $1 = 1$. (Wem leere Produkte unheimlich sind: für $n = 1$ erhalten wir $a + b = \binom{1}{0}a^0b^1 + \binom{1}{1}a^1b^0$. Auch dies gilt.)

Angenommen, die Formel gilt für $n \in \mathbb{N}$. Dann folgt

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}\\ \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k} - \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k}\\ = a^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k} + \sum_{k=1}^{n} a^k b^{n+1-k} + b^{n+1}.\end{aligned}$$

In der zweiten Summe benennen wir den Summationsindex erst um in j und ersetzen j durch $k-1$. Die Summe wird damit zu

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}a^k b^{n-k+1}.$$

Wir fassen zusammen

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} = \binom{n+1}{n+1}a^{n+1}b^0 + \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right)a^k b^{n-k+1} + \binom{n+1}{0}a^0 b^{n+1}\\ = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k}\end{aligned}$$

Die Formel gilt mit vollständiger Induktion. □

Kapitel 2

Folgen und Reihen

Wir wollen noch schnell den Abbildungsbegriff klären.

Abbildungen

Definition 2.1. *(i) Seien M, N Mengen. Eine* Abbildung $f : M \to N$ *ist eine Teilmenge $F \subset M \times N$, so dass es für jedes $m \in M$ genau ein $n \in N$ gibt mit $(m, n) \in F$. Das Element n heißt* Wert der Abbildung in m *und wir schreiben $f(m) = n$ und $f : m \mapsto n$.*

(ii) Die Menge M heißt Definitionsmenge *von f, die Menge N heißt* Zielmenge *von f. Die Menge $\{f(m)|m \in M\} \subset N$ heißt* Wertemenge *oder* Bild *von f.*

(iii) Die Abbildung $f : M \to N$ heißt injektiv*, wenn es für jedes $n \in N$ höchstens ein $m \in M$ gibt mit $f(n) = m$.*

(iv) Sie heißt surjektiv*, wenn sie es für jedes $n \in N$ ein $m \in M$ gibt mit $f(m) = n$.*

(v) Sie heißt bijektiv*, wenn sie injektiv und surjektiv ist. Solche Abbildungen heißen auch* invertierbar.

(vi) Sei $f : M \to N$ bijektiv. Die Umkehrabbildung $f^{-1} : N \to M$ *ist definiert als die eindeutige Abbildung, so dass $f^{-1}(n)$ gleich dem eindeutigen $m \in M$ ist mit $f(m) = n$.*

(vii) Seien M, N, P Mengen und $f : M \to N$ und $g : N \to P$ Abbildungen. Dann ist die Verknüpfung $g \circ f : M \to P$ *definiert als die Abbildung mit $m \mapsto g(f(m))$.*

Nach Definition sind zwei Abbildungen $f, g : M \to N$ gleich, wenn für jedes $m \in M$ gilt $f(m) = g(m)$.

Beispiel. (i) Sei M eine Menge. Dann gibt es die Abbildung $\mathrm{id}_M : M \to M$ mit $\mathrm{id}_M(m) = m$ für alle $m \in M$. Sie entspricht der Teilmenge $\{(m, m) \in M \times M | m \in M\}$.

(ii) Sei $M = N = \mathbb{N}$, f die Abbildung mit $f(x) = x^2$. Dann ist f injektiv, aber nicht surjektiv.

(iii) Sei $M = N = \mathbb{R}$, f die Abbildung $f(x) = 2x$. Dann ist die Abbildung bijektiv mit Umkehrabbildung $f^{-1}(y) = \frac{1}{2}y$.

Lemma 2.2. *(i) Die Verknüpfung von Abbildung ist assoziativ, d.h. für Abbildungen $f : M \to N$, $g : N \to P$, $h : P \to S$ gilt*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

(ii) Sei $f : M \to N$ bijektiv. Dann gilt

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_M, f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_N$$

Beweis: Sei $m \in M$. Wir berechnen

$$h \circ (g \circ f)(m) = h(g \circ f)(m)) = f(g(f(m)))$$

und

$$(h \circ g) \circ f)(m) = h \circ g(f(m)) = h(g(f(m))).$$

Die beiden Bildwerte stimmen überein, also sind die Funktionen gleich.
Sei nun f bijektiv, $n \in N$. Nach Definition ist $f(f^{-1}(n)) = n$, also $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_N$. Sei $m \in M$. Wir betrachten $f^{-1} \circ f(m) = f^{-1}(f(m))$. Nach Definition ist dies das eindeutige Element $m' \in M$ mit $f(m') = f(m)$. Da f injektiv ist, gilt $m = m'$, also $f^{-1} \circ f(m) = m$ und daher $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_M$. □

Folgen und Grenzwerte

Definition 2.3. *Eine* Folge *(von reellen Zahlen) ist eine Abbildung $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Wir schreiben $(a_n)_{n \geq 1}$ mit $a_n = a(n)$ oder $(a_1, a_2, a_3, \dots)$.*

Wir werden auch Folgen von komplexen Zahlen und Folgen von Funktionen betrachten. Manchmal benutzen wir auch den Definitionsbereich $\mathbb{N}_0$.

Beispiel. (i) (konstante Folge) Sei $a \in \mathbb{R}$, $a_n = a$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(ii) $a_n = \frac{1}{n}$, also $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots)$

(iii) (arithmetische Folge) Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a_n = an + b$

(iv) (geometrische Folge) Sei $q \in \mathbb{R}$, $a_n = q^n$

(v) (Fibonacci-Zahlen) Sei $a_0 = 1, a_1 = 1$ und $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$. Rekursiv (d.h. mit vollständiger Induktion) sind dadurch alle Folgenglieder definiert. Wir erhalten

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots).$$

Damit kommen wir zu unserer wichtigsten Definition.

Definition 2.4. *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Die Folge heißt* konvergent gegen *$a \in \mathbb{R}$, falls gilt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt $|a_n - a| < \varepsilon$.*

Wir schreiben $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Die Zahl a heißt Grenzwert *der Folge.*

Sie heißt divergent*, wenn sie gegen kein $a \in \mathbb{R}$ konvergiert.*

Die Zahl n_0 hängt von ε ab!

Beispiel. (i) Die konstante Folge $a_n = a$ ist konvergent gegen a.

(ii) Die Folge $a_n = \frac{1}{n}$ ist konvergent mit Grenzwert 0. Wir überprüfen. Sei $\varepsilon > 0$. Sei $n_0 \geq \varepsilon^{-1}$ eine natürliche Zahl. Sie existiert nach dem archimedischen Axiom. Für $n \geq n_0$ folgt

$$|0 - \frac{1}{n}| \leq |\frac{1}{n_0}| < \varepsilon.$$

(iii) Die alternierende Folge $a_n = (-1)^n$ divergiert.

Beweis: Angenommen, die Folge hat den Grenzwert a. Sei $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Nach Definition gibt es n_0, so dass $|a - (-1)^n| < \frac{1}{2}$ für alle $n \geq n_0$. Ohne Einschränkung ist n_0 gerade. Es gilt insbesondere $|a-(-1)^{n_0}| = |a-1| < \frac{1}{2}$ und $|a - (-1)^{n_0+1}| = |a + 1| < \frac{1}{2}$. Nach Dreiecksungleichung folgt

$$|2| = |a + 1 - a + 1| \leq |a + 1| + |-a - 1| = |a + 1| + |a - 1| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Dies ist ein Widerspruch. Ein solches a existiert also nicht. □

Lemma 2.5. *Die geometrische Folge $a_n = q^n$ konvergiert für $|q| < 1$ gegen 0.*

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Gesucht ist ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $|q^n| = |q|^n < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$.

Sei $b = |q|$. Nach Voraussetzung ist $b^{-1} > 1$. Wir setzen $x = b^{-1} - 1 > 0$. Nach der Bernoullischen Ungleichung (Lemma 1.11) gilt

$$b^{-n} > (1 + x)^n > 1 + nx$$

Nach dem Archimedischen Axiom gibt es ein n_0, so dass $n_0 x > \varepsilon^{-1} - 1$, also

$$b^{-n_0} > \varepsilon^{-1} \Leftrightarrow b^{n_0} < \varepsilon.$$

Für $0 < b < 1$ folgt induktiv $0 < b^i < 1$ für alle $i \geq 0$ und daher

$$b^{n_0+i} < b^i\varepsilon < \varepsilon.$$

□

Rechenregeln

Lemma 2.6. *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge von reellen Zahlen. Dann ist der Grenzwert eindeutig.*

Beweis: Seien $a \neq b$ Grenzwerte der Folge. Sei $\varepsilon = \frac{1}{4}|a-b|$. Nach Voraussetzung ist dies positiv. Es gibt also n_0 so dass $|a - a_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. Ebenso gibt es m_0, so dass und m_0, $|b - a_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq m_0$. Sei N größer gleich n_0 und m_0, z.B. das Maximum der beiden. Dann gilt

$$|a-b| = |a - a_N + a_N - b| \leq |a - a_n| + |b - a_n| < \varepsilon + \varepsilon = \frac{1}{4}|a-b|.$$

Dies ist ein Widerspruch, der Fall $a \neq b$ kann nicht eintreten. □

Definition 2.7. *Eine Folge heißt* nach oben beschränkt *bwz.* nach unten beschränkt *bwz.* beschränkt, *wenn ihre Wertemenge $\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ diese Eigenschaft hat.*

Satz 2.8. *Jede konvergente Folge ist beschränkt.*

Beweis: Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergente Folge mit Grenzwert a. Sei $\varepsilon = 1$. Dann gibt es n_0, so dass $|a - a_n| < 1$ für alle $n \geq n_0$. Sei K das Maximum der Menge $\{|a - a_1|, |a - a_2|, \ldots, |a - a_{n_0} - 1|, 1\}$. Dann ist

$$|a - a_n| < K \text{ für alle } n \geq 1 \ .$$

Dies ist äquivalent zu

$$a - a_n < K \text{ und } a_n - a < K$$

bzw.

$$a - K < a_n \text{ und } a_n < a + K.$$

□

Die Umkehrung ist falsch! Es gibt beschränkte Folgen, die nicht konvergieren, z.B. $(-1)^n$.

Satz 2.9 (Grenzwertsätze)**.** *Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen mit Grenzwerten a und b. Sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

(i) (skalare Vielfache) Die Folge $(\lambda a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert mit Grenzwert λa.

(ii) (Summenfolge) Die Folge $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert mit Grenzwert $a + b$.

(iii) (Differenzfolge) Die Folge $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert mit Grenzwert $a - b$.

(iv) (Produktfolge)Die Folge $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert mit Grenzwert ab.

(v) (Quotientenfolge)Sei $b \neq 0$. Dann gibt es n_0 mit $b_n \neq 0$ für $n \geq n_0$, und die Folge $(a/b_n)_{n\geq n_0}$ konvergiert mit Grenzwert a/b.

(vi) Es sei $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann folgt $a \leq b$.

Beweis: Falls $\lambda = 0$, so ist die Folge $(\lambda a_n)_{n\geq 1}$ konstant, also konvergent. Sei nun $\lambda \neq 0$. Sei $\varepsilon > 0$. Setze $\varepsilon' = |\lambda^{-1}|\varepsilon$. Nach Voraussetzung gibt es n_0, so dass $|a - a_n| < \varepsilon'$ for alle $n \geq n_0$. Also folgt für $n \geq n_0$

$$|\lambda a - \lambda a_n| = |\lambda||a - a_n| < |\lambda|\varepsilon' = \varepsilon.$$

Die Folge konvergiert mit Grenzwert λa.
Wir betrachten die Summenfolge. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$|a - a_n| < \frac{1}{2}\varepsilon, |b - b_n| < \frac{1}{2}\varepsilon$$

für alle $n \geq n_0$. Es folgt für $n \geq n_0$

$$|a + b - (a_n + b_n)| = |(a - a_n) + (b - b_n)| \leq |a - a_n| + |b - b_n| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

Die Summenfolge konvergiert gegen $a + b$.
Die Aussage über die Differenzenfolgt folgt aus den beiden ersten, da $a_n - b_n = a_n + (-1)b_n$.
Wir betrachten die Produktfolge. Nach Satz 2.8 ist die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ beschränkt. Es gibt also $K > 0$ mit $|a_n| < K$ für alle $n \geq 1$. Nach eventuellem Vergrößern von K können wir auch $|b| < K$ voraussetzen.
Sei nun $\varepsilon > 0$. Dann gibt es n_0, so dass für alle $n \geq n_0$

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2K}, \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2K}.$$

(Erst gibt es ein n_0 für die erste Folge, dann eins für die zweite. Wir nehmen das Maximum der beiden.) Es folgt für alle $n \geq n_0$

$$|a_n b_n - ab| = |a_n(b - b_n) + (a_n - a)b| \leq |a_n||b - b_n| + |b||a_n - a| < K\frac{\varepsilon}{2K} + |b|\frac{\varepsilon}{2K} = \varepsilon.$$

Die Produktfolge konvergiert also gegen ab.
Wir betrachten nun die Quotientenfolge. Die allgemeine Aussage folgt aus dem Spezialfall $a_n = 1$ (d.h. es geht um die Folge $(b_n^{-1})_{n\geq 1}$ und der Formel für Produktfolgen. Wir betrachten also den Spezialfall. Nach Voraussetzung ist $b \neq 0$. Sei $\delta = |b|/2$. Dann gibt es $N_0 \geq 1$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt

$$|b - b_n| < \frac{|b|}{2}.$$

Hierausfolgt $b_n \neq 0$ für diese n, genauer sogar $|b_n| > \frac{|b|}{2}$.
Ab jetzt betrachten wir $(b_n^{-1})_{n\geq N_0}$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $n_0 \geq N_0$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt

$$|b - b_n| < \frac{\varepsilon|b|^2}{2}.$$

Dann gilt für diese n

$$\left|\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b}\right|=\left|\frac{b-b_n}{bb_n}\right|=\frac{1}{|b_n||b|}|b_n-b|<\frac{1}{|b|^2}\frac{\varepsilon|b|^2}{2}=\varepsilon.$$

Sei schließlich $a_n \leq b_n$. Angenommen, es ist $b < a$. Sei $\varepsilon = \frac{a-b}{2}$. Dann ist $a-\varepsilon = b+\varepsilon$. Dann gibt es n_0, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt

$$|a_n - a| < \varepsilon, |b - b_n| < \varepsilon.$$

Es folgt also

$$a_n > a-\varepsilon, b_n < b+\varepsilon = a-\varepsilon.$$

Es folgt also $b_n < a_n$, im Widerspruch zur Voraussetzung. □

Beispiel. (i) Sei $a_n = \frac{n+1}{n-1}$. Dann gilt auch $a_n = \frac{1+\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}}$. Wegen $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ folgt mit den Rechenregeln

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}} = \frac{1+0}{1-0} = 1.$$

Insbesondere existiert dieser Grenzwert.

(ii) Sei $a_n = \frac{3n^2-2n+1}{17n^4-1}$. Wir schreiben um zu $a_n = \frac{2n^{-2}-2n^{-3}+n^{-4}}{17-n^{-4}}$ und berechnen den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{2\cdot 0 - 2\cdot 0 + 0}{17-0} = 0.$$

Korollar 2.10. *Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergente Folge. Seien $A, B \in \mathbb{R}$ mit*

$$A \leq a_n \leq B$$

für alle n. Dann gilt $A \leq \lim_{n\to\infty} a_n \leq B$.

Beweis: Wir wenden die letzte Aussage an mit den konstanten Folgen A und B. □

Definition 2.11. *Eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ heißt* Nullfolge, *wenn sie gegen* 0 *konvergiert, d.h. für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$*

$$|a_n| < \varepsilon.$$

Nach Definition konvergiert eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ genau dann gegen a, wenn $a_n - a$ eine Nullfolge ist.

Lemma 2.12. *Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Nullfolge, $(b_n)_{n\geq 1}$ beschränkt. Dann ist $(a_nb_n)_{n\geq 1}$ eine Nullfolge.*

Beweis: Sei $|b_n| < C$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es n_0, so dass für $n \geq n_0$ gilt $|a_n| < \varepsilon C^{-1}$. Es folgt

$$|a_n b_n| = |a_n||b_n| < \varepsilon C^{-1} C = \varepsilon.$$

□

Für manche Zwecke ist es geschickt, auch $\pm\infty$ als Grenzwerte zuzulassen.

Definition 2.13. *Eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$* divergiert bestimmt gegen ∞, *wenn es für jedes $C \in \mathbb{R}$ ein n_0 gibt, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt $a_n > C$. Wir schreiben* $\lim_{n\to\infty} a_n \to \infty$.
Sie divergiert bestimmt gegen $-\infty$, *wenn es für jedes $C \in \mathbb{R}$ ein n_0 gibt, so dass für alle $n \geq 0$ gilt $a_n < C$. Wir schreiben* $\lim_{n\to\infty} a_n \to -\infty$.

Die Rechenregeln in Satz 2.9 gelten auch bei bestimmter Divergenz, wenn wir verabreden:

(i) $\infty + a = \infty$ für alle $a \in \mathbb{R}$.

(ii) $\infty + \infty = \infty$.

(iii) $-\infty + a = -\infty$ für alle $a \in \mathbb{R}$.

(iv) $-\infty - \infty = -\infty$.

(v) $\infty \cdot a = \begin{cases} \infty & a > 0, \\ -\infty & a < 0. \end{cases}$.

(vi) $-\infty \cdot a = \begin{cases} -\infty & a > 0, \\ \infty & a < 0. \end{cases}$.

(vii) $\infty\infty = \infty$, $(-\infty)\infty = -\infty$, $(-\infty)(-\infty) = \infty$.

(viii) $\frac{a}{\pm\infty} = 0$ für $a \neq 0$.

Die Werte $\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$ und 0∞ sind nicht erklärt.

Beweis: Die Beweise sind die analog zu denen in Satz 2.9. Exemplarisch behandeln wir den Fall $\lim_{n\to\infty} a_n \to \infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Wir betrachten $(a_n+b_n)_{n\geq 1}$. Die Folge $(b_n)_{n\geq 1}$ ist konvergent, also nach unten beschränkt. Es gibt C_b, so dass $b_n > C_b$. Sei nun $C \in \mathbb{R}$. Nach Voraussetzung gibt es n_0 so dass für alle $n \geq n_0$ gilt $a_n > C - C_b$. Es folgt

$$a_n + b_n > C - C_b + C_b = C.$$

Die Summenfolge ist bestimmt divergent gegen ∞. □

Beispiel. Es ist $\lim_{n\to\infty} n \to \infty$ und daher

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Lemma 2.14. *Sei $q > 1$. Dann divergiert die Folge $(q^n)_{n\geq 1}$ bestimmt gegen ∞.*

Beweis: Nach Lemma 2.5 ist die Folge der Kehrwerte $(q^{-n})_{n\geq 1}$ eine Nullfolge. Sei nun $C > 0$. Wir setzen $\varepsilon = C^{-1}$. Dann gibt es n_0 so dass für alle $n \geq n_0$ gilt $q^{-n} = |q^{-n}| < \varepsilon = C^{-1}$. Die bedeutet $q^n > C$. □

Konvergenzkriterien

Es geht nun darum zu entscheiden, *ob* eine Folge konvergiert. Wir haben bereits gesehen (Satz 2.8), dass ein notwendiges Kriterium ist, dass sie beschränkt ist.

Monotonie

Definition 2.15. *Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von reellen Zahlen heißt* (streng) monoton wachsend, *falls $a_{n+1} \geq a_n$ (bwz. $(a_{n+1} > a_n)$) für alle $n \in \mathbb{N}$. Sie heißt* (streng) monoton fallend, *falls $a_{n+1} \leq a_n$ (bwz. $(a_{n+1} < a_n)$) für alle $n \in \mathbb{N}$.*

Beispiel. Eine geometrische Folge $a_n = q^n$ ist streng monoton wachsend für $q > 1$ und streng monoton fallend für $0 < q < 1$. Sie ist weder noch für $q < 0$.

Satz 2.16. *Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine monoton wachsende, nach oben beschränkte Folge. Dann konvergiert die Folge, und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n | n \geq 1\}.$$

Sei $(b_n)_{n\geq 1}$ eine monoton fallende, nach unten beschränkte Folge. Dann konvergiert die Folge, und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \inf\{b_n | n \geq 1\}.$$

Beweis: Sei a das Supremum. Sei $\varepsilon > 0$. Nach Definition des Supremums gibt es n_0, so dass $a - a_{n_0} < \varepsilon$. Für jedes $n \geq n_0$ folgt

$$a - a_n = a - a_{n_0} + a_{n_0} - a_n < \varepsilon$$

denn $a_n \geq a_{n_0}$. Da a das Supremum ist, gilt ausserdem $a - a_n \geq 0$, zusammen also

$$|a - a_n| = a - a_n < \varepsilon.$$

Damit haben wir gezeigt, dass a der Grenzwert der Folge ist.
Das Argument für b_n geht genauso. □

Bemerkung. Hier haben wir das Vollständigkeitsaxiom benutzt!

Zur Behandlung des nächsten Beispiels tragen wir eine wichtige Ungleichung nach.

Lemma 2.17. *Seien $x, y \geq 0$. Dann gilt*

$$\frac{1}{2}(x+y) \geq \sqrt{xy}.$$

In Worten: das arithmetische Mittel ist größer gleich dem geometrischen Mittel.

Beweis:

$$\frac{1}{4}(x^2+2xy+y^2) - xy = \frac{1}{4}(x^2-2xy+y^2) = \frac{1}{2}(x-y)^2 \geq 0.$$

Also gilt $\frac{1}{4}(x+y)^2 > xy$. Beide Seiten sind größer gleich 0. Die Aussage folgt durch Ziehen der Quadratwurzel. □

Beispiel. Seien $b > 0$. Wir definieren die Folge $f_1 = b$,

$$f_{n+1} = \frac{1}{2}\left(f_n + \frac{2}{f_n}\right).$$

Wir wollen zeigen, dass diese Folge gegen $\sqrt{2}$ konvergiert.

Beweis: Induktiv sehen wir, dass $f_n > 0$ für alle $n \geq 1$. Daher ist die Folge wohldefiniert. Für jedes $n \geq 1$ gilt

$$\frac{1}{2}\left(f_n + \frac{2}{f_n}\right) \geq \sqrt{f_n \frac{2}{f_n}} = \sqrt{2}.$$

Die Folge ist für $n \geq 2$ nach unten beschränkt. Wir zeigen nun, dass sie monoton fällt. Es gilt $f_n \geq \sqrt{2} \Rightarrow \frac{2}{f_n} \leq f_n$ und damit für $n \geq 2$.

$$f_{n+1} = \frac{1}{2}\left(f_n + \frac{2}{f_n}\right) \leq \frac{1}{2}\left(f_n + f_n\right) = f_n.$$

Als beschränkte, monton fallende Folge hat $(f_n)_{n \geq 1}$ einen Grenzwert f. Sei $g_n = f_{n+1}$. Diese Folge hat denselben Grenzwert. Nach den Grenzwertgesetzen gilt

$$\begin{aligned} f = \lim_{n\to\infty} g_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(f_n + \frac{2}{n}\right) \\ = \frac{1}{2}\left(\lim f_n + \frac{2}{\lim n \to \infty f_n}\right) = \frac{1}{2}(f + \frac{2}{f}) \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\frac{1}{2}f = \frac{1}{f} \Rightarrow f^2 = 2 \Rightarrow f = \pm\sqrt{2}.$$

Wegen $f_n \geq \sqrt{2}$ folgt $f \geq \sqrt{2}$, also $f = \sqrt{2}$. □

Limes superior und inferior

Beschränkte Folgen haben nicht immer einen Grenzwert, aber immer einen "oberen" und einen "unteren" Grenzwert. Wir stellen bei unserer Entwicklung der Theorie diesen Begriff in den Vordergrund.

Definition 2.18. *Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge. Falls $(a_n)_{n\geq 1}$ nach oben beschränkt ist, setzen wir*

$$a'_n = \sup\{a_m | m \geq n\}, \limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a'_n$$

(lies: Limes superior) falls der Grenzwert existiert.
Sei $(b_n)_{n\geq 1}$ eine Folge. Falls $(b_n)_{n\geq 1}$ nach unten beschränkt ist, setzen wir

$$b'_n = \inf\{b_m | m \geq n\}, \limsup_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} b'_n.$$

(lies: Limes inferior)

Beispiel. (i) Die alternierende Folge $a_n = (-1)^n$ hat den Limes superior 1 und den Limes inferior -1.

(ii) Die Folge

$$a_n = \begin{cases} 1 & n \text{ gerade,} \\ \frac{1}{n} & \text{ungerade.} \end{cases}$$

hat den Limes superior 1 und den Limes inferior 0.

Bemerkung. Ist die Folge nach oben unbeschränkt, so setzen wir auch $\limsup_{n\to\infty} a_n = \infty$. Ist sie nach oben beschränkt, aber der Limes superior existiert nicht, so setzen wir $\limsup_{n\to\infty} a_n = -\infty$. Umgekehrt gehen wir für den Limes inferior vor.

Lemma 2.19. *Die Folge der a'_n ist monoton fallend. Ist $a = \limsup_{n\to\infty} a_n$, so gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt*

$$a_n < a + \varepsilon.$$

Die Folge der b'_n is monoton steigend. Ist $b = \liminf_{n\to\infty} a_n$, so gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt

$$a_n > a - \varepsilon.$$

Ist $(a_n)_{\geq 1}$ eine beschränkte Folge, so sind $\limsup_{n\to\infty} a_n$ und $\liminf_{n\to\infty} a_n$ endlich, und es gilt

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

Beweis: Es ist
$$\{a_m|m \geq n\} \supset \{a_m|m \geq n+1\}.$$
Hieraus folgt $a'_n \geq a'_{n+1}$, die Folge ist monoton fallend. Ist die Folge der a_n nach unten beschränkt, dann auch die Folge der a'_n, der Grenzwert $\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a'_n$ existiert. Da die Folge monoton fällt, gilt $a \leq a'_n$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein n_0, so dass gilt $a'_{n_0} - a = |a'_{n_0} - a| < \varepsilon$. Wegen $a'_{n_0} = \sup\{a_n|n \geq n_0\}$ ist $a_n - a \leq a'_{n_0} - a < \varepsilon$.
Analog folgen die Aussagen über b. Für jedes n gilt
$$\inf\{a_m|m \geq n\} \leq \sup\{a_m|m \geq n\}.$$
Hieraus folgt die Ungleichung für die Grenzwerte. □

Satz 2.20. *Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist genau dann dann konvergent, wenn*
$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n$$
und endlich. Der Grenzwert stimmt mit diesem Wert überein.

Beweis: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent gegen a. Dann ist die Folge beschränkt, und daher sind $a_s = \limsup_{n\to\infty} a_n$ und $a_i = \liminf_{n\to\infty} a_n$ endlich. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es n_0, so dass für alle $n \geq n_0$
$$a_n - a \leq |a - a_n| < \varepsilon \Rightarrow a_n < a + \varepsilon.$$
Hieraus folgt $\limsup_{n\to\infty} a_n \leq a + \varepsilon$. Da dies für jedes $\varepsilon > 0$ gilt, muss sogar $\limsup_{n\to\infty} a_n \leq a$ gelten. Umgekehrt folgt $\liminf_{n\to\infty} a_n \geq a$. Zusammen
$$a \leq a_i \leq a_s \leq a \Rightarrow a = a_i = a_s.$$
Sei nun umgekehrt $\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n$ endlich. Wir nennen diesen Wert a. Sei $\varepsilon > 0$. Nach dem Lemma gibt es n_0 so dass für alle $n \geq n_0$
$$a_n - \limsup_{m\to\infty} a_m < \varepsilon, \liminf_{m\to\infty} a_m - a_n < \varepsilon.$$
Zusammen gilt also $|a_n - a| < \varepsilon$. Die Folge konvergiert also gegen a. □

Bemerkung. Falls $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = \infty$, so divergiert die Folge bestimmt gegen ∞, wie man leicht sieht.

Korollar 2.21. *Seien $(a_n)_{n\geq 1}$ und $(c_n)_{\geq n}$ konvergente Folgen mit demselben Grenzwert b. Sei $(b_n)_{n\geq 1}$ eine Folge mit $a_n \leq b_n \leq c_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert $(b_n)_{n\geq 1}$ ebenfalls gegen b.*

Beweis: Es gilt
$$b = \limsup_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} b_n \leq \limsup_{n\to\infty} c_n = b$$
also $b = \limsup_{n\to\infty} b_n$. Ebenso folgt $b = \liminf_{n\to\infty} b_n$. Zusammen also $b = \lim_{n\to\infty} b_n$. □

Häufungspunkte

Limes superior und limes inferior sind Beispiele für Häufungspunkte.

Definition 2.22. *Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge. Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt* Häufungspunkt*, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ und jedes $n_0 \in \mathbb{N}$ ein $n \geq n_0$ gibt mit $|a - a_n| < \varepsilon$.*

Beispiel. Sei a_n definiert durch $a_{2n+1} = 0$ und $a_{2n} = (-1)^n$, also $(0, -1, 0, 1, 0, -1, \dots)$. Diese Folge hat die Häufungspunkte 0, 1 und -1.

Lemma 2.23. *Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge.*

(i) Wenn $\limsup_{n\to\infty} a_n$ existiert, ist er ein Häufungspunkt.

(ii) Wenn $\liminf_{n\to\infty} a_n$ existiert, ist er ein Häufungspunkt.

(iii) Sei a ein Häufungspunkt von $(a_n)_{n\geq 1}$. Dann gilt

$$\liminf_{n\geq 1} a_n \leq a \leq \limsup_{n\geq 1} a_n.$$

(iv) Eine beschränkte Folge ist genau dann konvergent, wenn sie genau einen Häufungspunkt hat.

Beweis: Sei $a = \limsup_{n\to\infty} a_n < \infty$. Sei $\varepsilon > 0$ und $n_0 \geq 1$. Wie in der Definition des Limes superior setzen wir $a'_n = \sup\{a_m | m \geq n\}$. Zu ε gibt es N, so dass $|a - a'_N| < \varepsilon/2$. Nach der Definition des Supremums gibt es $n \geq \max n_0, N$ so dass $|a'_N - a_n| < \varepsilon/2$. Es folgt

$$|a - a_n| \leq |a - a'_N| + |a'_N - a_n| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Die zweite Aussage folgt analog.

Sei nun A ein beliebiger Häufungspunkt. Angenommen, $A > a$. Wir betrachten $\varepsilon = 1/2(A - a)$. Nach Lemma 2.19 gibt es n_0 so dass für alle $n \geq n_0$ gilt

$$a_n < a + \varepsilon = 1/2(A + a)$$

Gleichzeitg gibt es nach Definition des Häufungspunktes ein $n \geq n_0$ mit $|A - a_n| < \varepsilon$ und daher

$$a_n > A - \varepsilon = 1/2(A + a).$$

Die beiden Ungleichungen widersprechen sich, also gilt $A \leq a$. Die Aussage für den Limes inferior folgt genauso.

Jede beschränkte Folge hat Limes superior und Limes inferior. Sind alle Häufungspunkte gleich, dann auch diese beiden und die Folge ist konvergent nach Satz 2.20.

Ist umgekehrt die Folge konvergent, so stimmen Limes superior und Limes inferior überein, und jeder andere Häufungspunkt liegt zwischen ihnen. □

Korollar 2.24 (Satz von Bolzano-Weierstraß/Heine-Borel)**.** *Jede beschränkte Folge hat einen Häufungspunkt.*

Beweis: Ihr Limes superior exisistiert und ist ein Häufungspunkt. □

Meist findet man eine andere Charakterisierung von Häufungspunkten, die aber gleichwertig ist.

Definition 2.25. *Sei* $(a_n)_{n\geq 1}$. *Eine Folge* $(b_k)_{k\geq 1}$ *heißt* Teilfolge *von* $(a_n)_{n\geq 1}$, *wenn es eine streng monotone Folge von natürlichen Zahlen* $(n_1, n_2, n_2, \dots)$ *gibt mit* $b_k = a_{n_k}$.

Lemma 2.26. *Sei* $(a_n)_{n\geq 1}$. *Eine Zahl* a *ist genau dann Häufungspunkt der Folge, wenn es eine Teilfolge gibt, die gegen* a *konvergiert.*

Beweis: Sei a Häufungspunkt. Wir wählen $\varepsilon_k = 2^{-k}$. Die ist eine Nullfolge. Wir definieren induktiv $n_1 = 1$, $n_{k+1} \geq n_k + 1$ so dass $|a - a_{n_{k+1}}| < \varepsilon_k$. Ein solches Element existiert, da a ein Häufungspunkt ist. Dann ist $a - a_{n_k}$ eine Nullfolge, also ist a der Grenzwert dieser Teilfolge.
Sei umgekehrt $(a_{n_k})_{k\geq 1}$ eine Teilfolge mit Grenzwert a. Sei $\varepsilon > 0$, $n_0 \geq 1$. Dann gibt es k_0 so dass für alle $k \geq k_0$

$$|a - a_{n_k}| < \varepsilon$$

für alle $k \geq k_0$. Die Folge der n_k enthält nur endlich viele natürliche Zahlen kleiner gleich n_0. Also gibt es $k \geq k_0$ mit $n_k \geq n_0$. Dies ist das gesuchte n. □

Cauchy-Folgen

Schließlich kommen wir noch zur wichtigsten Charakterisierung von konvergenten Folgen.

Definition 2.27. *Eine Folge* $(a_n)_{n\geq 1}$ *heißt* Cauchy-Folge*, wenn es für jedes* $\varepsilon > 0$ *ein* $n_0 \in \mathbb{N}$ *gibt, so dass für alle* $m, n \geq n_0$ *gilt*

$$|a_m - a_n| < \varepsilon.$$

Theorem 2.28. *Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge. Jede Cauchy-Folge von reellen Zahlen konvergiert.*

Bemerkung. Ob eine Cauchy-Folge vorliegt, entscheidet sich nur anhand der Folgenglieder. Wir können also auch über Cauchy-Folgen von rationalen Zahlen sprechen. Allgemeiner funkioniert die Definition für jede Menge, auf der ein Abstandsbegriff existiert. Der erste Teil des Theorems gilt dann in dieser Allgemeinheit. Der zweite Teil folgt aus dem Supremsaxiom. Statt dessen setzt man oft auch das *Vollständigkeitsaxiom* voraus: jede Cauchy-Folge konvergiert. Bei unserem Zugang ist es ein Satz.

Beweis: Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert a. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es n_0, so dass für alle $n \geq n_0$

$$|a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Es folgt für $n, m \geq n_0$

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Es handelt sich um eine Cauchy-Folge.

Sei umgekehrt $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Cauchy-Folge. Sei Nach Voraussetzung (mit $\varepsilon = 1$) gibt es n_0, so dass $|a_n - a_{n_0}| < 1$ für alle $n \geq n_0$. Daher ist die Folge beschränkt und $a = \limsup_{n\to\infty} a_n$ und $b = \liminf_{n\to\infty} a_n$ existieren.

Sei nun $\varepsilon > 0$. Dann gibt es N, so dass $|a_n - a_N| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Hieraus folgt

$$a_n < a_N + \varepsilon \Rightarrow \sup\{a_n | n \geq N\} < a_N + \varepsilon$$

Nach Definition des Limes superior folgt

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \leq a_N + \varepsilon \Rightarrow a - a_N \leq \varepsilon$$

Ebenso folgt

$$a_n \geq a_N - \varepsilon \Rightarrow \inf\{a_n | n \geq N\} \leq a_N - \varepsilon.$$

Nach Definition des Limes inferior folgt

$$\liminf_{n\to\infty} a_n > a_M - \varepsilon \Rightarrow a_N - b < \varepsilon$$

und daher

$$a - b = a - a_N + a_N - b \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Dies gilt für alle $\varepsilon > 0$, also folgt $a - b \leq 0$. Da stets $a - b \geq 0$, folgt $a = b$. Nach Satz 2.20 konvergiert die Folge gegen diesen Wert. □

Reihen

Definition 2.29. *Sei $(a_k)_{k\geq 1}$ eine Folge. Die* unendliche Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *ist definiert als die Folge der* Partialsummen $P_n = \sum_{k=1}^{n} a_n$. *Ist die Folge $(P_n)_{n\geq 1}$ konvergent gegen $a \in \mathbb{R}$, so heißt diese Zahl* Summe *der Reihe. Wir sagen auch die Reihe konvergiert und schreiben*

$$a = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Beispiel. (i) Sei $a_k = (-1)^k$ die alternierende Folge. Dann lautet die Folge der Partialsummen $(-1, 0, -1, 0, \dots)$. Die Reihe konvergiert nicht.

(ii) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ konvergiert gegen 1, denn die Partialsummen sind $P_n = \frac{n}{n+1}$ (vollständige Induktion).

Wir kommen nun zum wichtigsten Beipspiel einer konvergenten Reihe.

Lemma 2.30 (Geometrische Reihe)**.** *Sei* $q \in \mathbb{R}$*. Wir betrachten die* unendliche geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$*. Falls* $|q| < 1$*, so konvergiert diese Reihe gegen* $1/(1-q)$*. Die Reihe divergiert für* $|q| > 1$*.*

Beweis: In Lemma 1.14 haben wir die Partialsumme berechnet. Es gilt

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Die Folge q^{n+1} divergiert für $|q| > 1$ und ist für $|q| < 1$ eine Nullfolge. Den Wert der Reihe erhalten wir aus den Grenzwertsätzen:

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1-\lim_{n\to\infty} q^{n+1}}{1-q} = \frac{1-0}{1-q}.$$

□

Und nun das wichtigste Gegenbeispiel:

Lemma 2.31 (Harmonische Reihe)**.** *Die Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ *divergiert bestimmt gegen* ∞*.*

Beweis: Wir schätzen nach unten ab durch die Kehrwerte der Potenzen von 2:

$$P_1 = 1$$
$$P_2 = 1 + \frac{1}{2}$$
$$P_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$
$$P_4 = 1 + \dots + \frac{1}{4} \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 + 2\frac{1}{2}$$
$$P_8 = 1 + \dots + \frac{1}{8} \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{8} = 1 + \frac{1}{2} + 2\frac{1}{4} + 4\frac{1}{8} = 1 + 3\frac{1}{2}$$

Allgemein: Sei $2^i \geq k > 2^{i-1}$ und daher $2^{-i} \leq \frac{1}{k}$. Für festes i gibt es von diesen Zahlen 2^{i-1} viele, nämlich alle von $2^{i-1}+1$ bis 2^i. Daher gilt

$$P_{2^N} = 1 + \dots + \frac{1}{2^N} \geq 1 + \frac{1}{2} + 2\frac{1}{4} + 4\frac{1}{8} + \dots + 2^{N-1}\frac{1}{2^N} = 1 + (N-1)\frac{1}{2}.$$

Für $N \to \infty$ ist diese Folge unbeschränkt, also divergiert die harmonische Reihe.

□

Die Divergenz der harmonischen Reihe ist knapp. Tatsächlich konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n}$ für jedes $n > 1$. Das sieht man am leichtesten mit dem Integralvergleichskriterium, das wir noch nicht formulieren können. Es geht aber auch mit der Hand, siehe unten.

Bemerkung. Reihen sind extrem wichtig, da einige der wichtigsten Funktionen (Sinus und Cosinus, Exponentialfunktion) als Reihen definiert werden. Allgemein approximieren wir Funktionen durch Reihen und machen sie dadurch berechenbar. Das Thema wird uns den Rest des Semesters begleiten.

Konvergenzkriterien

Satz 2.32 (Cauchy-Kriterium). *Sei $(a_k)_{k\geq 1}$ eine Folge. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ konvergiert genau dann, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $N \geq n \geq n_0$ gilt*

$$|\sum_{k=n}^{N} a_k| < \varepsilon.$$

Beweis: Die Bedingung ist äquivalent dazu, dass die Folge der Partialsummen eine Cauchy-Folge ist. □

Korollar 2.33. *Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent. Dann ist $(a_k)_{k\geq 1}$ eine Nullfolge.*

Beweis: Aus dem Cauchykriterium folgt insbesondere (mit $N = n$), dass es für jedes $\varepsilon > 0$ ein n_0 gibt, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt $|a_n| < \varepsilon$. Das bedeutet, dass es sich um eine Nullfolge handelt. □

Beispiel. Die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ divergiert für $|q| \geq 1$, da in diesem Fall q^k keine Nullfolge ist.

Lemma 2.34. *Sei $(a_k)_{k\geq 1}$ eine Folge nicht-negativer Zahlen. Dann konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ genau dann, wenn die Folge der Partialsummen beschränkt ist.*

Beweis: Nach Voraussetzung ist die Folge der Partialsummen monoton beschränkt, also konvergent. Umgekehrt ist eine konvergente Folge beschränkt. □

Das wertvollste Kriterium erhalten wir durch Vergleich mit einer konvergenten Reihe. Meist erhalten wir dadurche eine stärkere Eigenschaft, die wir zunächst einführen müssen.

Definition 2.35. *Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt* absolut konvergent*, wenn $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.*

Lemma 2.36. *Eine absolut konvergente Reihe ist konvergent.*

Beweis: Wegen der Dreiecksungleichung gilt für alle $N \geq n$

$$|\sum_{n=k}^{N} a_n| \leq \sum_{n=k}^{N} |a_k|.$$

Das Cauchy-Kriterium für $\sum_{n=1}^{\infty} |a_k|$ impliziert daher das Cauchy-Kriterium für $\sum_{n=1}^{\infty} a_k$. □

Satz 2.37 (Majorantenkriterium). *Sei $(a_k)_{k\geq 1}$ eine Folge und $(c_k)_k \geq 1$ eine Folge nicht-negativer Zahlen mit $c_k \geq |a_k|$ für alle k und $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ konvergent. Dann konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut.*

Beweis: Es gilt $\sum_{k=1}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=1}^{n} c_k$. Die zweite Folge von Partialsummen ist nach Voraussetzung konvergent, also auch beschränkt. Dann ist es auch die erste. Nach Kriterium konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$. □

Beispiel. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-m}$ konvergiert für $m \geq 2$.

Beweis: Wegen $k^{-m} \leq k^{-2}$ genügt es, $m = 2$ zu behandeln. In diesem Fall ist $\frac{1}{k(k-1)} \geq \frac{1}{k^2}$. Wir haben bereits gesehen, dass die erste Reihe konvergiert, also nach dem Majorantenkriterium auch die zweite. □

Wir vergleichen insbesondere $|a_k| \leq q^k$ für $q < 1$.

Satz 2.38 (Quotientenkriterium). *Sei $(a_k)_{k\geq 1}$ eine Folge. Sei $0 < q < 1$ eine Zahl mit*

$$\left| \frac{a_n}{a_{n-1}} \right| \leq q$$

für alle $n \geq 2$. Dann konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut.

Beweis: Aus der Voraussetzung erhalten wir mit vollständiger Induktion $|a_n| \leq q^{n-1}|a_1|$. Wir wenden das Majorantenkriterium an auf $c_n = |a_1|q^{n-1}$ und die unendliche geometrische Reihe. □

Beispiel. Es genügt *nicht* $|a_n/a_{n-1}| < 1$ vorauszusetzen, wie das Beispiel der harmonischen Reihe zeigt.

Beispiel. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ konvergiert. Es ist nämlich

$$\frac{1}{n!} \frac{(n-1)!}{1} = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2}$$

für $n \geq 2$. (Die Folge konvergiert gegen die Eulersche Zahl e, wie wir später noch systematisch diskutieren wollen.)

Satz 2.39 (Wurzelkriterium). *Sei $(a_k)_{k\geq 1}$ eine Folge. Sei $0 < q < 1$ eine Zahl mit*

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$$

für alle $n \geq 1$. Dann konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut.

Beweis: Aus der Voraussetzung erhalten wir $|a_n| \leq q^n$. Wir wenden wieder das Majorantenkriterium an auf $c_n = q^n$ und die unendliche geometrische Reihe. □

Nicht alle Reihen konvergieren absolut. Das prominenteste Beispiel ist $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{k}$.

Satz 2.40 (Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen). *Sei $(a_k)_{k\geq 1}$ eine monotone fallende Nullfolge von positiven Zahlen. Dann konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$.*

Beispiel. Insbesondere konvergiert die alternierende harmonische Reihe, aber sie konvergiert nicht absolut.

Beweis des Leibniz-Kriteriums: Sei $s_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Dann ist

$$s_{2n+2} - s_{2n} = a_{2n+2} - a_{2n-1} < 0,$$

d.h. die Folge $(s_{2n})_{n\geq 1}$ ist monoton fallend:

$$\cdots \leq s_6 \leq s_4 \leq s_2.$$

Ebenso ist die Folge der $(s_{2n+1})_{n\geq 1}$ monoton steigend:

$$s_1 \leq s_3 \leq s_5 \leq \ldots.$$

Gleichzeitig ist

$$s_{2n} - s_{2n-1} = a_{2n} > 0 \Rightarrow s_{2n-1} < s_{2n},$$

daher wird die Folge der s_{2n} nach unten beschränkt durch s_1 und konvergiert gegen S. Daher ist die Folge der s_{2n-1} nach oben beschränkt durch s_2 und konvergiert gegen S'. Die beiden Grenzwerte stimmen überein, da

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n} - \lim_{n\to\infty} s_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} a_{2n} = 0.$$

□

Rechenregeln

Lemma 2.41. *Seien $a = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $b = \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergent. Dann konvergieren auch die Summen und Differenzenfolgen, und es gilt*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k \pm b_k) = a \pm b.$$

Beweis: Wir wenden Satz 2.9 an. □

Mit Produkten ist es etwas komplizierter. Was erwarten wir?

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sum_{l=1}^{\infty} b_l = \sum_{k,l=1}^{\infty} a_k b_l = \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{k+l=N} a_k b_l.$$

Das Problem an dieser Rechnung ist, dass wir hier die Reihenfolge der Summanden vertauschen. Warum sollte das erlaubt sein?

Definition 2.42. *Seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, $\sum_{l=0}^{\infty} b_l$ Reihen. Wir definieren ihr* Cauchy-Produkt *als die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ mit*

$$c_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k b_{n-k}.$$

Satz 2.43 (Cauchy-Produkt-Formel). *Seien $a = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $b = \sum_{l=0}^{\infty} b_l$ absolut konvergent. Dann konvergiert ihr Cauchy-Produkt abolut gegen ab.*

Beweis: Wegen $|c_n| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k b_{n-k}|$ genügt es den Fall von positiven Reihen zu behandeln, also $a_k \geq 0$, $b_l \geq 0$. Dann gilt automatisch auch $|c_n| = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-l} \geq 0$. Damit ersparen wir uns die Betragszeichen.

Wir wenden zuerst den Grenzwertsatz an. $C_N^* = (\sum_{k=0}^{N} a_n)(\sum_{l=0}^{N})b_n$. Dann gilt nach Satz 2.9 die Gleicheit

$$\lim_{N\to\infty C_N^*} = ab.$$

Dies bedeutet: zu $\varepsilon > 0$ gibt es N_0, so dass für alle $N \geq N_0$ gilt

$$C_N - C_{N_0} = \sum_{(k,l)\in\Gamma_N} a_k b_l < \varepsilon$$

wobei

$$\Gamma_N = \{(k,l)|k,l \leq N\} \setminus \{(k,l)|k,l \leq N_0\}$$

Sei $C_N = \sum_{n=0}^{N} c_n$. Wir summieren über $a_k b_l$ mit $k,l \leq N$ mit $k + l \leq N$. Wir vergleichen mit C_N. Es ist

$$C_N^* - C_N = \sum_{(k,l)\in\Delta_N} a_k b_l$$

wobei $\Delta_N = \{(k,l)|k \leq N, l \leq N, k+l > N$. Für $N \geq 2N_0$ ist $\Delta_N \subset \Gamma_N$ und daher

$$C_N^* - C_N < \varepsilon.$$

Hieraus folgt, dass $C_N^* - C_N$ eine Nullfolge ist. Wir haben also

$$ab = \lim_{N\to\infty} C_N^* = \lim_{N\to\infty} C_N$$

wie behauptet. □

Sei $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung. Die Reihe $\sum_{k=1} \infty a_{\tau(k)}$ heißt dann *Umordnung* von $\sum_{k=1}^{\infty}$. Wir summieren über die selben Summanden, aber in einer anderen Reihenfolge.

Satz 2.44. *Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergente Reihe mit Grenzwert a. Dann konvergiert jede Umordnung ebenfalls gegen a.*

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Wegen der absoluten Konvergenz gibt es ein n_0, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt

$$\sum_{k=n}^{\infty} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Hieraus folgt

$$|a - \sum_{k=1}^{n_0-1} a_k| = |\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k| \leq \sum_{k=n_0} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sei nun N so groß, dass

$$\{\tau(0), \tau(1), \ldots, \tau(N)\} \supset \{1, 2, \ldots, n_0 - 1\}.$$

Für alle $m \geq N$ folgt

$$|\sum_{k=1}^{m} a_{\tau(k)} - a| \leq |\sum_{k=1}^{m} a_{\tau(k)} - \sum_{k=1}^{n_0-1} a_k| + |\sum_{k=1}^{n_0-1} a_k - a| \leq \sum_{k=n_0}^{\infty} |a_k| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

□

Kapitel 3

Funktionen und Stetigkeit

Definition 3.1. *Eine* Funktion *ist eine Abbildung*

$$f : D \to \mathbb{R}$$

wobei $D \subset \mathbb{R}$ *eine Teilmenge ist.*

Die Komposition von Funktionen ist definiert als die Komposition von Abbildungen. Summe, Differenz, Produkt und Quotienten von Funktionen sind punktweise definiert, also z.B. für $f, g : D \to \mathbb{R}$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \text{ für alle } x \in D.$$

(Damit der Quotient definiert ist, muss der Nenner ungleich 0 sein.)

Bemerkung. Die Menge der Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, zusammen mit der Multiplikation sogar eine $\mathbb{R}$-Algebra.

Meist betrachten wir Funktionen, die auf Intervallen definiert sind.

Definition 3.2. *Für* $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$ *heißt*

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$$

abgeschlossenes Intervall von a bis b *und*

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$$

offenes Intervall von a bis b. *Weiter sind*

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}, [a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$$

die halboffenen Intervalle. *Bei offenen Intervallen erlauben auch* $a, b = \pm\infty$, *z.B.*

$$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} | x < b\}, [a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x\}.$$

Bemerkung. In der Literatur findet sich oft auch $]a, b[$ für (a, b).

Stetigkeit ist die Eigenschaft einer Funktion, die erlaubt, sie mit Näherungsmethoden zu berechnen. Wenn wir nahe genug an den Punkt x herangehen, können wir den Funktionswert mit vorgegebener Genauigkeit berechnen.
Wir betrachten die folgenden Beispiele:

Beispiel. (i) $\mathrm{id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto x$.

(ii) $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto |x|$.

(iii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$ für $x \leq 0$ und $f(x) = 1$ für $x > 0$.

(iv) Die *Gaußklammer* $[\cdot] : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wobei $[x]$ die größte ganze Zahl kleiner gleich x ist (der "Vorkommateil").

(v) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = 0$ für $x \neq 0$ und $g(0) = 1$.

(vi) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $h(x) = 0$ für $x \in \mathbb{Q}$ und $g(x) = 1$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Definition 3.3. *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}$ eine Funktion. Sei $a \in D$.*

(i) Wir sagen

$$\lim_{x \to a} f(x) = b,$$

(der Grenzwert von f für x gegen a) wenn gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = b$ für alle Folgen $(x_n)_{n\geq 1}$ in D mit Grenzwert a.

(ii) Die Funktion f heißt stetig in a, *falls für*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

(iii) Die Funktion heißt stetig *oder* stetig auf D, *falls sie in allen Punkten von D stetig ist.*

Beispiel. In den obigen Beispielen:

- id und $|\cdot|$ sind stetig auf $\mathbb{R}$.
- $[\cdot]$ ist unstetig in $x \in \mathbb{Z}$, f und g unstetig in 0.
- h ist unstetig in allen Punkten $x \in \mathbb{R}$.

Beweis: Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann gibt es eine Folge $(q_n)_{n\geq 1}$ von rationalen Zahlen, die gegen x konvergiert. Es gilt also

$$\lim_{n\to\infty} f(q_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0 \neq f(x) = 1.$$

Sei X in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Dann gibt es eine Folge $(x_n)_{n\geq}$ von irrationalen Zahlen, die gegen x konvergiert. Es gilt also

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \neq f(x) = 0.$$

□

Satz 3.4. *Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $D \subset \mathbb{R}$, die in einem $a \in D$ stetig sind. Sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

(i) λf ist stetig in a.

(ii) $f + g$ und $f - g$ sind stetig in a.

(iii) fg ist stetig in a.

(iv) Ist $g(x) \neq 0$ für $x \in D$, so ist f/g stetig in a.

Beweis: Wir wenden die Grenzwertsätze 2.9 an. Z.B: Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in D mit Grenzwert a. Nach Voraussetzung gilt $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$ und $\lim_{n\to\infty} g(a_n) = g(a)$. Daher folgt mit Satz 2.9 (ii)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(f+g)(a_n) &= \lim_{n\to\infty}(f(a_n)+g(a_n)) \\ &= \lim_{n\to\infty} f(a_n) + \lim_{n\to\infty} g(a_n) = f(a)+g(a) = (f+g)(a).\end{aligned}$$

Nach Definition ist $f + g$ stetig in a.
Die anderen Aussagen werden genauso überprüft. □

Wir kennen bereits die stetige Funktion $x \mapsto x$. Durch mehrfaches Anwenden des Satzes sehen wir, dass auch $x \mapsto 2x^3 - \pi x + \sqrt{19}$ stetig ist.

Definition 3.5. *Eine Funktion $P : D \to \mathbb{R}$ heißt* Polynomfunktion*, wenn sie von der Form*

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

für festes $n \in \mathbb{N}_0$, $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ ist. Der Grad *von P ist das maximale i mit $a_i \neq 0$.*
Eine Funktion heißt rationale Funktion *R, wenn sie von der Form $R = P/Q$ mit Polynomfunktionen P, Q ist, so dass $Q(x) \neq 0$ auf D.*

Polynomfunktionen sind auf $D = \mathbb{R}$ definiert, rationale Funktionen auf einer kleineren Menge.

Korollar 3.6. *Sei $R : D \to \mathbb{R}$ eine rationale Funktion. Dann ist R stetig in allen Punkten von D.*

Beweis: Konstante Funktionen sind stetig, ebenso $x \mapsto x$. Mit Satz 3.4 sind dann alle Polynomfunktionen stetig. Nach Definition ist $R = P/Q$ mit $Q(x) \neq 0$ für $x \in D$. Wieder nach dem Satz ist auch R stetig. □

Bemerkung. Die Funktion $x \mapsto 1/x$ ist stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. In 0 ist sie nicht etwa unstetig, sondern einfach nicht definiert.

Lemma 3.7. *Seien $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : E \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $D \subset \mathbb{R}$, $f(D) \subset E \subset \mathbb{R}$. Sei f stetig in $a \in D$ und g stetig in $f(a)$. Dann ist $g \circ f$ stetig in a.*

Beweis: Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in D mit Grenzwert a. Da f stetig ist, konvergiert $f(a_n)$ gegen $f(a)$. Da g stetig ist, konvergiert $g(f(a_n))$ gegen $g(f(a))$. Damit ist $g \circ f$ stetig in a. $\square$

Beispiel. Sei f stetig auf D. Dann ist auch $|f|$ stetig auf D.

Alternative Charakterisierungen

Definition 3.8. *(i) Wir sagen*

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = b \text{ bzw. } \lim_{x\to a^+} = b$$

, (der linksseitige bzw. rechtsseitige Grenzwert von f für x gegen a) wenn gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = b$ *für alle Folgen $(x_n)_{n\geq 1}$ in D mit $x_n < a$ bzw. $x_n > a$ und mit Grenzwert a. (Wenn keine solche Folge existiert, so existiert auch der Grenzwert nicht.)*

(ii) f ist linksseitig bzw. rechtsseitig stetig *in a, falls* $\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$ *bzw.* $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$.

Beispiel. In den obigen Beispielen: Die Funktion $[\cdot]$ ist rechtsseitig stetig, denn $\lim_{x\to a^+}[x] = [a]$.
Die Funktion g mit $g(x) = 0$ für $x \neq 0$, $g(0) = 1$ hat $\lim_{x\to 0^\pm} g(x) = 0$. Sie ist weder links- noch rechtsseitig stetig.

Lemma 3.9. *Sei $D = (a, b)$, $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$. Dann ist f genau dann stetig in f, wenn f rechts- und linksseitig stetig ist. Es gilt dann*

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x).$$

Beweis: Wenn f stetig ist, so konvergiert für jede Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ mit $x_n \in D$ und Grenzwert x_0 die Bildfolge $(f(x_n))_{n\geq 1}$ gegen $f(x_0)$. Nach Definition ist sie daher auch links- und rechtsseitig stetig.
Sei umgekehrt f links- und rechtsseitig stetig in x_0. Wir betrachen eine beliebige Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ in D mit Grenzwert x_0. Die Indexmenge $\mathbb{N}$ zerfällt in drei diskunkte Teilmengen $I^+ = \{n \in \mathbb{N} | x_n > x_0\}$, $I^- = \{x \in \mathbb{N} | x_n < 0\}$, $I^0 = \{n \in \mathbb{N} | x_n = a\}$. Dies definiert drei (eventuell endliche) Teilfolgen von $(x_n)_{n\geq 1}$. Jede der drei hat nach Voraussetzung den Grenzwert $f(x_0)$. Also hat auch die Gesamtfolge den Grenzwert $f(x_0)$ (Übungsaufgabe). $\square$

Wie bei den Grenzwerten von Folgen kann man auch bei Grenzwerten von Funktionen mit $\pm\infty$ rechnen.
Man kann Stetigkeit auch ganz ohne Folgen diskutieren.

Satz 3.10 (ε-δ-Kriterium)**.** *Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $a \in D$. Dann ist f genau dann stetig in a, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x \in D \cap (a-\delta, a+\delta)$ gilt*

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Beweis: Sei zunächst das ε-δ-Kriterium erfüllt. Wir zeigen Stetigkeit in a. Sei $(x_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in D mit Grenzwert a. Wir zeigen $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$. Sei $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung gibt es δ mit $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ für alle $x \in D$ mit $|x - a| < \delta$. Da die Folge der $(x_n)_{n\geq 1}$ konvergiert, gibt es n_0 so dass für alle $n \geq n_0$ gilt $|x_n - a| < \delta$. Für diese $n \geq n_0$ gilt also $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$, wie zu zeigen war.

Sei umgekehrt das Kriterium ist verletzt. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass es für jedes $\delta > 0$ ein Element $x_\delta \in (a - \delta, a + \delta)$ gibt mit $|f(x_\delta) - f(a)| \geq \varepsilon$. Wir wählen $\delta_n = 1/n$. Dann bilden die (x_{δ_n}) eine Folge mit Grenzwert a, für die $f(x_{\delta_n})$ nicht gegen $f(a)$ konvergiert. Daher ist $\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$. ☐

Bemerkung. Man beachte, dass δ nicht nur von ε, sondern auch von a abhängt!

Beispiel. Sei $f(x) = 1/x$ auf $D = (0, \infty)$. Wir betrachten $\varepsilon = 1$. Angenommen, es gibt ein $\delta > 0$, so dass für alle $a > 0$ gilt

$$|f(x) - f(a)| < 1$$

für alle $|x - a| < \delta$. Sei $2n > \delta^{-1}$. Dann gilt für $a = \frac{1}{n}$ und $x = \frac{1}{2n}$ einerseits

$$|x - a| = \left|\frac{1}{2n} - \frac{1}{n}\right| = \frac{1}{2n} < \delta$$

anderseits

$$|f(x) - f(a)| = |2n - n| = n < 1.$$

Für $n > 1$ ist diese Bedingung verletzt.

Definition 3.11. *Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt* gleichmäßig stetig*, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x, x' \in D$ mit $|x - x'| < \delta$ gilt $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.*

Beispiel. Die Funktion $x \mapsto 2x$ ist gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}$ mit $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$.

Wir werden interessantere Beispiele kennenlernen. Die Bedingung wird beim Integrieren relevant.

Satz 3.12 (Gleichmäßige Stetigkeit)**.** *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktion auf einem abgeschlossenen beschränkten Intervall. Dann ist f gleichmäßig stetig.*

Beweis: Angenommen, f ist nicht gleichmäßig stetig. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass für jedes $\delta > 0$ Punkte x_δ, x'_δ in $[a, b]$ existieren mit

$$|x_\delta - x'_\delta| < \delta, |f(x_\delta) - f(x'_\delta)| \geq \varepsilon.$$

Wir wählen $\delta = 1/n$ und erhalten zwei Folgen x_n und x'_n mit

$$|x_n - x'_n| < 1/n, |f(x_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon.$$

Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß hat die Folge x_n eine konvergente Teilfolge $(x_{n(k)})_{k\geq 1}$ mit Grenzwert c. Sie hat nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß eine Teilfolge $(x_{n(k(m))})_{m\geq 1}$, so dass die Folge der zugehörigen $(x'_{n(k(m))})_{m\geq 1}$ ebenfalls konvergiert. Da $x_n - x'_n$ gegen Null konvergiert, haben die beiden Teilfolgen den selben Grenzwert. Da f stetig ist, folgt

$$\begin{aligned}\varepsilon &\leq \lim_{m\to\infty} |f(x_{n(k(m))}) - f(x'_{n(k(m))})| \\ &= |f(\lim_{m\to\infty} x_{n(k(m))})) - f(\lim_{m\to\infty} x'_{n(k(m))})| = |f(c) - f(c)| = 0.\end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch. Daher ist die Funktion gleichmäßig stetig. □

Sätze über stetige Funktionen

Satz 3.13 (Zwischenwertsatz)**.** *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf einem abgeschlossenen, beschränkten Intervall. Sei $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$. Dann gibt es ein $x \in [a,b]$ mit $f(x) = 0$.*

Bemerkung. Der Beweis enthält einen Algorithmus zur Nullstellenbestimmung!

Beweis: Wir definieren eine monoton steigende Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ und eine monoton fallende Folge $(b_n)_{n\geq 0}$ mit $a_n < b_n$, $b_n - a_n = 2^{-n}(b-a)$ und $f(a_n) < 0 < f(b_n)$. Es ist $a \neq b$, da $f(a) < 0 < f(b)$. Sei $a_0 = a$, $b_0 = b$. Wir betrachten $c_0 = \frac{1}{2}(a_0 + b_0)$, den Mittelpunkt des Intervalls.

- Falls $f(c_0) = 0$, so haben wir eine Nullstelle gefunden.
- Falls $f(c_0) < 0$, so setzen wir $a_1 = c_0$, $b_1 = b_0$.
- Falls $f(c_0) > 0$, so setzen wir $a_1 = a_0$, $b_1 = c_0$.

Dann gilt nach Konstruktion $b_1 - a_1 = 1/2(b_0 - a_0)$. Dieses Vorgehen wiederholen wir. Wir betrachten jeweils $c_n = \frac{1}{2}(b_n - c_n)$ und $f(c_n)$. Je nach Vorzeichen setzen wir $c_n = a_{n+1}$ oder $c_n = b_{n+1}$.

Als monoton wachsende bzw. fallende und beschränkte Folgen existieren die Grenzwerte $\lim_{n\to\infty} a_n$ und $\lim_{n\to\infty} b_n$. Da die Differenz $(b_n - a_n)_{n\geq 0}$ eine Nullfolge bilden, stimmen die Grenzwerte überein. Sei c der Grenzwert. Wegen $f(a_n) < 0$ und der Stetigkeit von f folgt

$$f(c) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \leq 0.$$

Genauso folgt

$$f(c) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) \geq 0.$$

Zusammen ist $f(c) = 0$, und wir haben unsere Nullstelle gefunden. □

Beispiel. Sei $a > 0$. Dann hat $x^2 = a$ eine Lösung in $\mathbb{R}$.

Beweis: Es genügt, den Fall $a > 1$ zu betrachten. Wir betrachten $f(x) = x^2 - a$. Für $x = 0$ hat die Funktion einen negativen Wert. Für $x = a$ hat sie den Wert $a^2 - a = a(a-1) > 0$. Nach dem Zwischenwertsatz hat die Funktion eine Nullstelle in $[0, a]$. $\square$

Korollar 3.14. *Sei $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Polynomfunktion ungeraden Grades. Dann hat P eine Nullstelle.*

Beweis: Wir wollen den Zwischenwertsatz anwenden. Wir suchen daher eine Stelle, an der das Polynom einen negativen Wert hat und eine Stelle, an der es einen positiven Wert hat.
Sei $P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ mit $a_i \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$ und n ungerade. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit ist $a_n = 1$ (andernfalls dividieren wir durch a_n).
Für $x > 0$ ist $x^n > 0$. Wir schätzen wir mit der Dreiecksungleichung ab

$$P(x) = x^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \geq x^n - \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| x^i.$$

Sei $M = \max a_i | i = 1, \ldots, n-1$ und $x > 1$, also $x^{n-1} \geq x^i$ für $i < n-1$. Dann können wir weiter abschätzen:

$$\sum_{i=0}^{n-1} |a_i| x^i \leq \sum_{i=0}^{n-1} M x^{n-1} = nMx^{n-1}.$$

Für $x > nM$ erhalten wir also

$$P(x) > 0.$$

Für $x > 0$ ist $x^n < 0$, da n ungerade ist. Eine analoge Abschätzung liefert $P(x) < 0$ für x sehr negativ. Sei also $x^- \in \mathbb{R}$ mit $P(x^-) < 0$ und $x^+ \in \mathbb{R}$ mit $P(x^+) > 0$. Wir wenden den Zwischenwertsatz an auf die stetige Funktion P im Intervall $[x^-, x^+]$ und erhalten eine Nullstelle. $\square$

Beispiel. Wie das Beispiel $x^2 + 1$ zeigt, hat nicht jedes Polynom eine Nullstelle in $\mathbb{R}$.

Wir halten fest, was wir im Beweis des Beispiels gezeigt haben.

Lemma 3.15. *Sei $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine nicht-konstante Polynomfunktion. Dann gilt*

$$\lim_{x \to \infty} P(x) \to \infty$$

und

$$\lim_{x \to -\infty} P(x) \to \begin{cases} \infty & P \text{ hat geraden Grad} \\ -\infty & P \text{ hat ungeraden Grad} \end{cases}$$

Beweis: Siehe Rechnungen im Beweis des Beispiels. □

Satz 3.16 (Minimum und Maximum)**.** *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf einem beschränkten abgeschlossenen Intervall. Dann ist die Funktion beschränkt und nimmt ihr Minimum und Maximum an, d.h. es gibt Stellen x_m und x_M in $[a, b]$, so dass*

$$f(x_m) = \min_{x\in[a,b]} f(x), \qquad f(x_M) = \max_{x\in[a,b]} f(x).$$

Beweis: Sei $A = \sup\{f(x)|x \in [a, b]\}$. Hier erlauben wir $A = \infty$, falls die Menge unbeschränkt ist. Dann gibt es eine Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ in $[a, b]$, so dass $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstrass (Korollar 2.24) hat die Folge der x_n eine konvergente Teilfolge, da $[a, b]$ beschränkt ist. Wir ersetzen $(x_n)_{n\geq 1}$ durch diese Teilfolge. Sei $x_M = \lim_{n\to\infty} x_n$. Wegen $a \leq x_n \leq b$ für alle n gilt auch $a \leq x_M \leq b$, d.h. $x_M \in [a, b]$. Weiter ist wegen der Stetigkeit von f

$$f(x_M) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = A.$$

Die Konstruktion von x_m geht analog. □

Wir fassen die beiden Sätze zusammen:

Korollar 3.17. *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ stetig, $[a, b] \subset D$ ein beschränktes, abgeschlossenes Intervall. Dann ist $f([a, b])$ ebenfalls ein beschränktes abgeschlossenes Intervall.*

Beweis: Nach dem Satz über Minimum und Maximum, liegen alle Werte in einem Intervall $[c, d]$ und die Randwerte werden in x_m und x_M angenommen. Wir behaupten nun, dass auch jeder Wert dazwischen angenommen wird. Sei also $c < y < d$. Wir wenden den Zwischenwertsatz an auf die stetige Funktion $g = f - y$ und das Intervall $[x_m, x_M] \subset D$. Es ist $g(x_m) = f(x_m) - y = c - y < 0$ und $g(x_M) = f(x_M) - y = d - y > 0$. Nach dem Zwischenwertsatz hat g eine Nullstelle. Also nimmt f den Wert y an. □

Bemerkung. In der Sprache der Topologie: Abgeschlossene beschränkte Intervalle sind die *kompakt* zusammenhängenden Teilmengen in $\mathbb{R}$. Bilder von kompakten bzw. zusammenhängenden Mengen unter stetigen Abbildungen sind kompakt bzw. zusammenhängend. Auf diesen abstrakteren Standpunkt werden wir spätenstens zurückkommen, wenn wir Funktionen in mehreren Variablen behandeln.

Ist eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zusätzlich streng monoton wachsend, so erhalten wir sogar eine bijektive Abbildung $[a, b] \to [f(a), f(b)]$, denn sie nimmt ihr Minimum in a und ihr Maximum in b an. Sie hat also eine Umkehrfunktion.

Satz 3.18. *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend. Dann ist $f^{-1} : [f(a), f(b)] \to \mathbb{R}$ ebenfalls stetig.*

Beweis: Wir schreiben $g = f^{-1}$. Wir betrachten eine Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ in $[f(a), f(b)]$ mit Grenzwert x. Wir betrachten $(y_n)_{n\geq 1}$ mit $y_n = g(x_n)$. Zu zeigen ist $\lim_{n\to\infty} y_n = g(x)$.

Die Folge $(y_n)_{n\geq 1}$ liegt in $[a, b]$, ist also beschränkt. Sei y ein Häufungspunkt. Sei $(y_{n(k)})_{k\geq 1}$ eine zugehörige Teilfolge mit Grenzwert y. Wegen der Stetigkeit von f folgt

$$\lim_{k\to\infty} f(y_{n(k)}) = f(y).$$

Nach Definition ist $f(y_{n(k)}) = f(g(x_{n(k)})) = x_{n(k)}$ und daher $f(y) = x$ und nach Definition $y = g(x)$. Damit sind alle Häufungspunkte der Folge $(y_n)_{n\geq 1}$ gleich. Die Folge konvergiert also gegen $g(x)$. $\square$

Kapitel 4

Elementare Funktionen und Potenzreihen

Wir wollen uns mit der Exponentialfunktion beschäftigen und den trigonometrischen Funktionen Sinus und Cosinus.

Die naive Definition der *Exponentialfunktion* geht vom Potenzieren aus. Sei $a > 1$. Wir wissen, was a^n für $n \in \mathbb{Z}$ bedeutet. Für $n, m \in \mathbb{Z}$ mit $m \neq 0$ definieren wir

$$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$$

(Die Existenz dieser Wurzeln ist eine Übungsaufgabe). Für eine reelle Zahl x setzen wir schließlich

$$a^x = \lim_{n\to\infty} a^{x_n}$$

wobei $(x_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von rationalen Zahlen ist mit Grenzwert x. Für die Wohldefiniertheit müssten wir in dieser Definition hart arbeiten. Wir gehen daher ganz anders vor.

Ähnlich ist die Situation bei den trigonometrischen Funktionen. Wir betrachten ein rechtwinklinges Dreieck mit Öffungswinkel x (gemessen als Bogenlänge entlang dem Einheitskreis) und Hypothenuse der Länge 1. Dieses Dreieck definiert einen Punkt auf dem Einheitskreis in $\mathbb{R}^2$. Seine Koodianten sind $(\sin(x), \cos(x))$. Auch hier gehen wir ganz anders vor.

Exponentialfunktion

Definition 4.1. *Sei* $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$. *Dies definiert die* Exponentialfunktion.

Lemma 4.2. *Die Reihe konvergiert absolut für alle x.*

Beweis: Wir benutzen das Quotientenkriterium für $a_k = x^k/k!$. Wir erhalten

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\frac{k!}{x^k}\right| = \frac{|x|}{k+1}.$$

Dies ist eine Nullfolge. Es gibt also ein k_0, so dass $|x|/(k+1) < 1/2$ für alle $k \geq k_0$. Nach dem Quotientenkriterium konvergiert die Reihe absolut. □

Es gilt $\exp(0) = 1$. Die Zahl $\mathrm{e} = \exp(1)$ heißt *Eulersche Zahl.*

Satz 4.3. *Es gilt*

$$\exp(x)\exp(y) = \exp(x+y), \quad \exp(-x) = \exp(x)^{-1}.$$

Beweis: Die Reihen konvergieren absolut, daher dürfen wir das Produkt der Grenzwerte als Cauchy-Produkt ausrechnen. Es gilt

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^i}{i!}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{y^j}{j!} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i+j=n}\frac{x^i y^j}{i!j!}.$$

Wir rechnen weiter mit den Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

und erhalten mit der binomischen Formel

$$\exp(x)\exp(y) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i y^{n-i} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(x+y)^n = \exp(x+y).$$

Die zweite Formel folgt wegen

$$\exp(x)\exp(-x) = \exp(0) = 1.$$

□

Korollar 4.4. *Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $\exp(x) > 0$. Die Funktion ist streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}$ und nach oben unbeschränkt.*

Beweis: Für $x > 0$ ist die Reihe offensichtlich größer 1. Für $x < 0$ ist $\exp(x) = \exp(-x)^{-1}$ mit $-x > 0$ ebenfalls positiv.

Sei schließlich $a \in \mathbb{R}$, $b = a + \delta$ mit $\delta > 0$. Dann gilt

$$\frac{\exp(b)}{\exp(a)} = \frac{\exp(a)\exp(\delta)}{\exp(a)} = \exp(\delta) > 1$$

Hieraus folgt

$$\exp(b) > \exp(a).$$

Wir wollen noch zeigen, dass exp unbeschränkt ist. Sei $x > 1$. Dann ist $\exp(x) = q$ mit $q > 1$. Es folgt

$$\lim_{n\to\infty}\exp(nx) = \lim_{n\to\infty} q^n \to \infty.$$

□

Als nächstes wollen wir die Funktion auf Stetigkeit untersuchen. Dies erledigen wir gleich in größerer Allgemeinheit, nämlich für alle Potenzreihen. Wir wollen dabei außerdem komplexe Argumente $x \in \mathbb{C}$ erlauben.

Komplexe Folgen

Eine komplexe Zahl hat stets eindeutig die Form $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Die Zahl x heißt *Realteil* von z. Die Zahl y heißt *Imaginärteil* von z. Sie hat den Absolutbetrag

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Die Konvergenz von Folgen $(a_n)_{n\geq 1}$ und Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ wird wörtlich so definiert wie die Konvergenz von reellen Folgen. Alle Sätze gelten weiterhin, wenn Monotonie nicht erwähnt wird. Insbesondere gelten die gleichen Konvergenz- und Stetigkeitskriterien. Die Beweise bleiben entweder wörtlich gültig, oder wir erhalten den komplexen aus dem reellen Satz, denn wir haben die folgende Abschätzung:

Lemma 4.5. *Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

$$|x|, |y| \leq |z| \leq |x| + |y|.$$

Beweis: Es gilt

$$|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} = |z|.$$

Die zweite Aussage ist ein Spezialfall der Dreiecksungleichung. □

Korollar 4.6. *Eine Folge von komplexen Zahlen konvergiert genau dann, wenn die Folge ihrer Real- und die Folge ihrer Imaginärteile konvergiert.*

Beweis: Sei $z_n = x_n + iy_n$ und $x + iy = z = \lim_{n\to\infty} z_n$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es n_0, so dass für alle $n \geq n_0$

$$|z - z_n| < \varepsilon.$$

Wegen $|x - x_n| \leq |z - z_n|$ konvergiert dann die Folge der x_n gegen x. Ebenso argumentieren wir für $\lim_{n\to\infty} y_n = y$.

Sei umgekehrt $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, $y = \lim_{n\to\infty} y_n$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es n_0, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt

$$|x - x_n| < \varepsilon/2, |y - y_n| < \varepsilon/2.$$

Wegen $|z - z_n| \leq |x - x_n| + |y - y_n| < \varepsilon$ konvergiert dann die Folge $(z_n)_{n\geq 1}$ gegen $x + iy$. □

Auch die Aussagen über absolute Konvergenz von Reihen und Cauchy-Produkte gelten weiterhin.

Potenzreihen

Definition 4.7. *Eine* Potenzreihe *ist eine Reihe der Form*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$$

für eine komplexe Folge $(a_k)_{k\geq 0}$*, festes* $z_0 \in \mathbb{C}$ *und* $z \in \mathbb{C}$.

Das beste Konvergenzkriterium ist hier das Wurzelkriterium. Wir betrachten also

$$\sqrt[k]{|a_k(z-z_0)^k|} = \sqrt[k]{|a_k|}\ |z-z_0|.$$

Damit die Reihe konvergiert, muss dies kleiner als 1 sein.

Definition 4.8. *Sei* $(a_k)_{k\geq 0}$ *eine Folge komplexer Zahlen. Dann heißt der Kehrwert* r *von*

$$t = \limsup \sqrt[k]{|a_k|}$$

Konvergenzradius *der Potenzreihe* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$.

Beispiel. Die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ hat den Konvergenzradius 1, denn $a_k = 1$ impliziert $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{1} = 1$.

Satz 4.9. *Sei* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ *eine Potenzreihe mit Konvergenzradius* r*. Dann konvergiert die Reihe absolut für* $|z-z_0| < r$ *und sie divergiert für* $|z-z_0| > r$*. Genauer: ist* $r' < r$*, so gibt es für alle* z *mit* $|z-z_0| \leq r'$ *eine konvergente Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} b_n$ *positiver Zahlen mit* $|a_k(z-z_0)^k \leq b_k$*,*

Potenzreihen konvergieren also auf Kreisscheiben, im reellen Bild auf Intervallen um 0.

Beweis: Ohne Einschränkung ist $z_0 = 0$. Wir wenden das Wurzelkriterium an. Sei $|z| \leq r' < r$. Dann gilt

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k| r'^k} = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} r' < r^{-1} r = 1.$$

Sei $1 > \varepsilon > 0$, z.B. $\varepsilon = 1/2$. Dann gibt es also ein k_0, so dass für alle $k \geq k_0$ gilt $\sqrt[k]{|a_k| r'^k} \leq 1 - \varepsilon = q$. Nach dem Wurzelkriterium konvergiert die Reihe absolut. Genauer: für $k \geq k_0$ gilt $|a_k z^k| \leq q^k$. Wir setzen $b_k = q^k$ für $k \geq k_0$ und $b_k = |a_k z^k$ für $k < k_0$. Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergiert, da die geometrische Reihe konvergiert. $\square$

Bemerkung. Über die Konvergenz auf dem Kreisrand $|z-z_0| = r$ können wir nichts sagen, wie das Beispiel $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}$ zeigt. Die Reihe divergiert in $x = 1$ und konvergiert in $z = -1$. (Es handelt sich übrigens um die Reihe zu $-\ln(1-z)$. Einfach termweise differenizieren, wie wir später noch begründen werden.)

Praktischer ist oft das Quotientenkriterium.

Satz 4.10. *Sei $(a_k)_{k\geq 0}$ eine Folge, so dass $a_k \neq 0$ für k genügend groß. (D.h. es gibt ein k_0, so dass $a_k \neq 0$ für alle $k \geq k_0$). Wenn $t = \lim_{k\to\infty} a_{k+1}/a_k$ existiert, dann ist $r = t^{-1}$ der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$.*

Beweis: Mit derselben Argumentation wie für eben sehen wir, dass die Reihe konvergiert für $|z| < t^{-1}$ und divergiert für $|z| > t^{-1}$. Dann muss t^{-1} der Konvergenzradius sein. □

Beispiel. Die Exponentialreihe hat den Konvergenzradius ∞, denn $a_{k+1}/a_k = 1/(k+1)$ hat den Grenzwert 0.

Wir wollen nun von der Stetigkeit der Partialsummen $\sum_{k=0}^{N} a_k(z-z_0)^k$ auf die Stetigkeit der Grenzfunktion schließen. Dabei gibt es jedoch eine Komplikation.

Definition 4.11. *Sei $(f_n)_{n\geq 0}$ eine Folge von Funktionen $f_n : D \to \mathbb{C}$ mit $D \subset \mathbb{C}$. Wir sagen, die Folge* konvergiert punktweise *gegen eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$, wenn für jedes $z \in D$ die Folge $(f_n(z))_{n\geq 0}$ gegen $f(z)$ konvergiert. Wir schreiben $f = \lim_{n\to\infty} f_n$.*
Die Folge konvergiert gleichmäßig *gegen f, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein n_0 gibt, so dass*

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$$

für alle $n \geq n_0$ und alle $z \in D$.

Im zweiten Fall hängt n_0 nicht von $z \in D$ ab! Gleichmäßig konvergente Folgen von Funktionen sind punktweise konvergent, umgekehrt nicht unbedingt.

Lemma 4.12. *Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius r. Dann konvergiert die Folge der Partialsummen gleichmäßig auf jeder Kreisscheibe $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r'\}$ mit $0 \leq r' < r$.*

Beweis: Wie in Satz 4.9 gezeigt, können wir abschätzen

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k(z-z_0)^k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

Dabei hängen die b_k nur von r', nicht aber von z ab. Sei nun $\varepsilon > 0$. Dann gibt es n_0, so dass $|\sum_{k=n}^{\infty} b_k| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. Es folgt

$$|\sum_{k=n}^{\infty} a_k(z-z_0)^k| \leq \sum_{k=n}^{\infty} |a_k||z-z_0|^k \leq \sum_{k=n}^{\infty} b_k < \varepsilon$$

Die Folge der Partialsummen konvergiert gleichmäßig. □

Satz 4.13. *Sei $(f_n)_{n\geq 0}$ eine gleichmäßig konvergente Folge von stetigen Funktionen $f_n : D \to \mathbb{C}$ für $D \subset \mathbb{C}$. Dann ist die Grenzfunktion $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ stetig.*

Beweis: Sei $z_0 \in D$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es n_0, so dass für alle $n \geq n_0$ und $z \in D$ gilt

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon/3.$$

Die Funktion f_{n_0} ist stetig. Also gibt es $\delta > 0$, so dass für $|z - z_0| < \delta$ folgt

$$|f_{n_0}(z) - f_{n_0}(z_0| < \varepsilon/3.$$

Wir setzen zusammen: für $z \in D$ mit $|z - z_0| < \delta$ gilt

$$|f(z) - f(z_0) \leq |f(z) - f_{n_0}(z)| + |f_{n_0}(z) - f_{n_0}(z_0)| + |f_{n_0}(z_0) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

Die Funktion f ist stetig. □

Korollar 4.14. *Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius r. Dann ist die durch die Reihe definierte Funktion auf $\{z||z - z_0| < r\}$ stetig.*

Beweis: Wir überprüfen Stetigkeit in z_1. Wir wählen $r' < r$ mit $|z_1 - z_0| < q$. Dann konvergiert die Reihe gleichmäßig auf der Kreisscheibe mit Radius r' und nach dem Kriterium ist die Grenzfunktion dort stetig, insbesondere ist sie in z_1 stetig. □

Korollar 4.15. *Die Exponentialfunktion ist stetig.*

Beweis: Nach Definition ist sie eine Potenzreihe. Wir haben gesehen, dass der Konvergenzradius ∞ ist. □

Korollar 4.16. *Die Exponentialfunktion ist eine bijektive Funktion*

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}.$$

Es gilt $\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$.

Beweis: Für $x \geq 0$ ist die Funktion unbeschränkt. In $x = 0$ nimmt sie den Wert 1 an. Nach dem Zwischenwertsatz nimmt sie also jeden Wert zwischen 1 und ∞ an. Für $x < 0$ ist $\exp(x) = \exp(-x)^{-1}$. Nach den Grenzwertsätzen folgt

$$\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = \lim_{x\to-\infty} \exp(-x)^{-1} = \lim_{t\to\infty} \exp(t)^{-1} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Wir haben also die Surjektivität in der angegebenen Weise verifiziert. Die Injektivität folgt aus der strengen Monotonie. □

Definition 4.17. *Der* (natürliche) Logarithmus

$$\log : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$$

ist definiert also die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion, d.h. $\log(\exp(x)) = x$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$.

Bemerkung. In der Mathematik ist die Notation log üblich. In technischen Disziplinen schreibt man oft ln und meint mit log den dekadischen Logarithmus.

Korollar 4.18. *Die Logarithmusfunktion ist stetig. Sie erfüllt*

(i) $\log(1) = 0$.

(ii) $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$.

(iii) $\lim_{x\to 0} \log(x) \to -\infty$, $\lim_{x\to\infty} \log(x) \to \infty$.

Beweis: Sie ist die Umkehrfunktion einer streng monotonen stetigen Funktion. Die Rechenregeln folgen aus den Eigenschaften der Exponentialfunktion. □

Definition 4.19. *Sei $a > 0$, $z \in \mathbb{C}$. Wir definieren*

$$a^z = \exp(\log(a)z).$$

Aus den Rechenregeln für die Exponentialfunktion folgt $a^x a^y = a^{x+y}$ und $a^1 = a$.

Trigonometrische Funktion

Definition 4.20. *Wir definieren die* Sinusfunktion

$$\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

durch die Potenzreihe

$$\sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Wir definieren die Kosinusfunktion

$$\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

durch die Potenzreihe

$$\cos(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}$$

Lemma 4.21. *Sinus- und Kosinusreihe haben den Konvergenzradius ∞. Für $z \in \mathbb{R}$ nehmen sie reelle Werte an.*

Beweis: Wir betrachten $a_k = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}$ mit $|a_k| = \frac{1}{(2k+1)!}$. Dies ist eine Teilfolge der Koeffizientenfogle der Exponentialfunktion, daher hat sie den gleichen Limes superior. Das Argument für Kosinus ist genauso.

Beim Einsetzen von reellen Werten erhalten wir reelle Folgen, also auch reelle Grenzwerte. □

Korollar 4.22. *Sinus und Kosinus sind stetig.*

Beweis: Potenzreihen sind innerhalb des Konvergenzradiuses stetig. □

Satz 4.23. *(i)* $\sin$ *ist ungerade, d.h.* $\sin(-z) = -\sin(z)$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$.

(ii) $\cos$ *ist gerade, d.h.* $\cos(-z) = \cos(z)$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$.

(iii) $\exp(i\cdot) = \cos + i\sin$.

(iv) $\sin = \frac{1}{2i}(\exp(i\cdot) - \exp(-i\cdot))$.

(v) $\cos = \frac{1}{2}(\exp(i\cdot) + \exp(-i\cdot))$.

(vi) $\sin^2 + \cos^2 = 1$

Beweis: Die ersten beiden Aussagen sind offensichtlich in der Reihendarstellung. Wir berechnen die dritte Formel:

$$\exp(iz) = \sum_{n=0}^{\infty} i^n \frac{z^n}{n!}.$$

Wir spalten in gerade und ungerade n auf und erhalten

$$\exp(iz) = \sum_{k=0}^{\infty} i^{2k} \frac{z^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} i^{2k+1} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Wegen $i^{2k} = (-1)^k$ ist das erste gerade die Kosinusreihe. Wegen $i^{2k-1} = i(-1)^k$ ist das zweite gerade i mal die Sinusreihe.
Wir erhalten außerdem

$$\exp(-iz) = \cos(-z) + i\sin(-z) = \cos(z) - i\sin(z).$$

Durch Addieren bzw. Subtrahieren der Ausdrücke für $\exp(iz)$ und $\exp(-iz)$ erhalten wir die Formen für $\sin(z)$ und $\cos(z)$.
Wir quadrieren und setzen ein:

$$\begin{aligned}\sin^2 z + \cos^2 z &= \frac{1}{-4}\left(\exp(2iz) - 2 + \exp(-2iz)\right) + \frac{1}{4}\left(\exp(2iz) + 2 + \exp(-2iz)\right) \\ &= 1.\end{aligned}$$

□

Korollar 4.24. *Auf* $\mathbb{R}$ *nehmen* $\sin$ *und* $\cos$ *nur Werte in* $[-1, 1]$ *an. Für* $x \in \mathbb{R}$ *gilt*

$$\exp(ix) = \cos(x) + i\sin(x)$$

und diese Zahl hat den Absolutbetrag 1.

Beweis: Beides folgt aus der Bedingung $\sin^2 x + cos^2 x = 1$ und der Information, dass die Werte reell sind. □

Hieraus folgen weitere Identitäten, indem wir $\exp(ix)\exp(iy)$ auf zwei Weisen berechnen. Einerseits

$$\exp(ix)\exp(iy) = \exp(i(x+y)) = \cos(x+y) + i\sin(x+y)$$

andererseits

$$\begin{aligned}\exp(ix)\exp(iy) &= (\cos(x) + i\sin(x))(\cos(y) + i\sin(y)) \\ &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) + i(\cos(x)\sin(y) + \sin(x)\cos(y))\end{aligned}$$

Korollar 4.25 (Additionstheoreme für Sinus und Kosinus)**.** *Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt*

(i) $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$

(ii) $\sin(x+y) = \cos(x)\sin(y) + \sin(x)\cos(y)$.

Beweis: Wir vergleichen in der obigen Rechnung Realteil und Imaginärteil. □

Unser nächstes Ziel ist es, eine Nullstelle von Cosinus zu finden. Wegen des Zwischenwertsatzes genügt es dafür, eine Stelle anzugegeben, an der die Funktion negativ ist.

Lemma 4.26. *(i) Die Funktion* $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ist auf* $[0,2]$ *größer gleich* 0.

(ii) Es gilt $\cos(2) < 0$.

Beweis: Wir betrachten die Reihe und fassen je zwei Terme zusammen:

$$\begin{aligned}\sin(x) &= \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \\ &= \frac{x}{1!}\left(1 - \frac{x^2}{2\cdot 3}\right) + \frac{x^5}{5!}\left(1 - \frac{x^2}{6\cdot 7}\right) + \dots\end{aligned}$$

Für $x \in (0,2]$ ist jeder dieser Summenden positiv: der Vorfaktor ist positiv; der Ausdruck in der Klammer ist von der Form

$$1 - \frac{x^2}{k(k+1)} \geq 1 - \frac{2^2}{2\cdot 3} > 0.$$

Ebenso gehen wir für Cosinus vor, setzen aber direkt $x = 2$.

$$\begin{aligned}\cos(x) &= 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} - \frac{2^6}{6!} + \dots \\ &= 1 - \frac{4}{2} + \frac{16}{24} \\ &- \frac{2^6}{6!}\left(1 - \frac{2^2}{7\cdot 8}\right) - \frac{2^{10}}{10!}\left(1 - \frac{2^2}{11\cdot 12}\right) - \dots\end{aligned}$$

Die ersten drei Summanden sind zusammen $1 - 2 + \frac{2}{3} < 0$. In jedem weiteren Summanden ist der Vorfaktor negativ und der Klammerausdruck wieder positiv. □

Definition 4.27. *Sei* $\pi \in [0,4]$ *die kleinste reelle Zahl mit* $\cos(\pi/2) = 0$.

Lemma 4.28. π *ist wohldefiniert.*

Beweis: $\cos(0) = 1$, $\cos(2) < 0$ und cos ist stetig. Die Nullstelle existiert nach dem Zwischenwertsatz. Wir betrachten alle $x \in [0,2]$ mit $\cos(x) = 0$. Diese Menge hat ein Infimum $x_0 \in [0,2]$. Wegen der Stetigkeit von cos ist $\cos(x_0) = 0$. □

Satz 4.29. *(i)* $\sin(\pi/2) = 1$, $\exp(i\pi/2) = i$.

(ii) exp *ist* $2\pi i$*-periodisch, d.h. für alle* $z \in \mathbb{C}$ *gilt*

$$\exp(z + 2\pi i) = \exp(z).$$

(iii) Die Funktionen sin, cos *sind* 2π*-periodisch, d.h. für alle* $z \in \mathbb{C}$ *gilt*

$$\sin(z + 2\pi) = \sin(z), \quad \cos(z + 2\pi) = \cos(z).$$

(iv) Für alle $z \in \mathbb{C}$ *gilt* $\cos(z) = \sin(z + \pi/2)$.

(v) sin *und* cos *sind auf* $[0, \pi/2]$ *streng monoton wachsend bzw. fallend.*

Beweis: Wegen $1 = \sin(\pi/2)^2 + \cos(\pi/2)^2 = \sin(\pi/2)^2$ gilt $\sin(\pi/2) = \pm 1$. Wegen $\sin(x) \geq 0$ in $[0,2]$ ist der Wert positiv, also 1. Aus der Formel 4.24 folgt

$$\exp(i\pi/2) = \cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2) = 0 + i \cdot 1 = i.$$

Daher ist

$$\exp(2\pi i) = \exp(i\pi/2)^4 = i^4 = 1.$$

Aus der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion folgt dann die Periodizität von exp. Hieraus folgt mit Formel (iv) und (v) aus Satz 4.23 die Periodizität für sin und cos.

Wir betrachten

$$\begin{aligned}
\sin(z + \pi/2) &= \frac{1}{2i}(\exp(iz + i\pi/2) + \exp(-iz - i\pi/2)) \\
&= \frac{1}{2i}(i\exp(iz) - i\exp(-iz)) \\
&= \frac{1}{2i}(\exp(iz) - \exp(iz) \\
&= \cos(z)
\end{aligned}$$

Die Monotonieaussagen können wir noch nicht beweisen. Sie folgen aus einem Ableitungskriterium, siehe Korollar 5.14. □

Aus den diversen Zusammenhängen ($\sin(-x) = -\sin(x)$, $\cos(x) = \sin(x + \pi/2)$ und der Monotonie auf $[0, \pi/2]$ haben wir ein genaues Bild vom Verlauf von Sinus und Kosinus:

x	$\sin(x)$	$\cos(x)$
$[0, \pi/2]$	$[0, 1]$	$[0, 1]$
$[\pi/2, \pi]$	$[0, 1]$	$[-1, 0]$
$[\pi, 3\pi/2]$	$[-1, 0]$	$[-1, 0]$
$[3\pi/2, 2\pi]$	$[-1, 0]$	$[0, 1]$

Satz 4.30. *Jede komplexe Zahl $z \neq 0$ hat eine eindeutige Darstellung in der Form*

$$z = r \exp(it)$$

mit $r \in \mathbb{R}_{>0}$ und $t \in [0, 2\pi)$.

Wir nennen das Paar (r, t) die *Polarkoordinaten* von z. r ist der Absolutbetrag, t das *Argument* von z.

Beweis: Sei $r = |z|$. Dann hat z/r den Absolutbetrag 1. Wir schreiben

$$z/r = x + iy$$

mit $x^2 + y^2 = 1$, insbesondere $|x|, |y| \in [0, 1]$. Je nach Vorzeichen müssen wir eine Fallunterscheidung vornehmen.
Sind $x, y \geq 0$, so gibt es eine eindeutige Zahl $t \in [0, 1]$ mit $\cos(t) = x$. Es folgt automatisch $\sin(t) = y$ und daher $z/r = \exp(it)$.
Die anderen Fälle sind analog. $\square$

In Polarkoordinaten wird die Multiplikation von komplexen Zahlen sehr einfach. Sei $z = r \exp(it)$, $z' = r' \exp(it')$, so folgt

$$zz' = rr' \exp(i(t + t').$$

Hierbei kann es passieren, dass $t + t' > 2\pi$. Um das Produkt in Polarkoordinaten darzustellen, ersetzen wir $t + t'$ durch $t + t' - 2\pi$.
Auch Wurzelziehen wird ganz leicht, denn für $z = r \exp(it)$ ist $z' = \sqrt[n]{r} \exp(it/n)$ eine Zahl mit $(z')^n = z$. Speziell für $z = 1 = 1 \exp(2\pi i)$ erhalten wir ein *n-te Einheitswurzel* $\exp(2\pi i/n)$. Geometrisch handelt es sich um eine Ecke des regelmäßigen n-Ecks, das dem Einheitskreis eingeschrieben wird. Alle Konstruktionen der elementaren ebenen Geometrie lassen sich so in Rechnungen mit komplexen Zahlen übersetzen.

Kapitel 5

Differentiation

Wir kehren zurück in die reelle Situation. Unser Ziel ist es, eine Funktion

$$f : D \to \mathbb{R}$$

nahe bei einem $x_0 \in D$ möglichst gut durch eine lineare Funktion

$$l : x \mapsto a(x - x_0) + b$$

zu approximieren. Für praktische Zwecke verhält sich f nahe bei einem x_0 genau wie l. Für b muss man offensichtlich $f(x_0)$ wählen, die beste Annäherung durch eine konstante Funktion.

Definition 5.1. *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}$ eine Funktion. Sei $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt. Die Funktion f heißt* differenzierbar *in x_0 mit Ableitung m in x_0, wenn es eine Funktion $\phi : D \to \mathbb{R}$, stetig in x_0 gibt mit*

$$f(x) = f(x_0) + m(x - x_0) + \phi(x)(x - x_0)$$

für alle $x \in D$ und $\phi(x_0) = 0$. Wir schreiben auch

$$m = f'(x_0).$$

Die Funktion heißt differenzierbar *auf D, wenn sie in jedem Punkt von D differenzierbar ist. Die Funktion*

$$f' : D \to \mathbb{R}, \quad x_0 \mapsto f'(x_0)$$

heißt Ableitung *von f.*

Bemerkung. Wir schreiben auch nach Leibniz

$$f' = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}.$$

Dies ist zunächst nur Notation, passt aber in einen sehr suggestiven Kalkül.

In der Physik schreibt man oft auch $\dot{f} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ für ein Funktion $f : t \mapsto f(t)$, vor allem wenn die Variable t für die Zeitvariable steht.

Beispiel. Die Funktion $f : x \mapsto x^2$ ist differenzierbar auf $\mathbb{R}$ mit Ableitung $x_0 \mapsto 2x_0$. Es ist nämlich

$$\phi(x)(x - x_0) = f(x) - f(x_0) - 2x_0(x - x_0) = x^2 - x_0^2 - 2x_0x_+2x_0^2 = (x - x_0)^2$$

und diese Funktion ist stetig.

Lemma 5.2. *Wenn f differenzierbar ist in x_0, dann ist f auch stetig in x_0.*

Beweis: Der Ausdruck $f(x) = f(x_0) + m(x - x_0) + \phi(x)(x - x_0)$ ist stetig. □

Lemma 5.3. *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}$ eine Funktion, $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt. Dann ist f genau dann in x_0 differenzierbar, wenn*

$$\lim_{x \to x_0, x \neq x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. Dieser Wert ist dann die Ableitung in x_0.

Der Ausdruck $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ heißt auch *Differenzenquotient*. Der Grenzwert heißt *Differentialquotient*.

Beweis: Sei f differenzierbar in x_0, also

$$f(x) = f(x_0) + m(x - x_0) + \phi(x)(x - x_0)$$

mit einer stetigen Funktion ϕ. Wir bilden den Differentenquotienten und erhalten

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{m(x - x_0) + \phi(x)(x - x_0)}{x - x_0} = m + \phi(x).$$

Der Grenzwert ist dann $m + \phi(x_0) = m$.

Umgekehrt setzen wir voraus, dass der Grenzwert des Differenzenquotienten für $x \neq x_0$ existiert und nennen ihn m. Wir definieren

$$\phi(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - m & x \neq x_0 \\ 0 & x = x_0. \end{cases}$$

Dies definiert eine Funktion auf D. Wir untersuchen sie auf Stetigkeit in x_0. Für jede Folge $(x_n)_{n \geq 1}$ in $D \setminus \{x_0\}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ konvergiert $\phi(x)$ gegen 0. Daher ist ϕ stetig auf ganz D. Ausserdem ist

$$f(x) = f(x_0) + m(x - x_0) + \phi(x)(x - x_0)$$

in x_0 und in $D \setminus \{0\}$ wie gewünscht. □

Oft schreibt man den Differenzenquotienten als

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$

Hier hat x die Rolle von x_0 und $x + h$ die Rolle von x. Zu berechnen ist dann $\lim_{h\to 0}$.

Beispiel. Sei $f(x) = x^2$. Der Differenzenquotient ist

$$\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} = 2hx + h^2$$

und hat den Grenzwert $2x$ für $h \to 0$.

Der Differenzenquotient hat eine geometrische Interpretation als Steigung der Sekante durch die Punkt $(x, f(x))$ und $(x_0, f(x_0))$. Daher hat die Ableitung eine geometrische Interpretation als Steigung der Tangente an f im Punkt x_0. Die Tangentengleichung ist

$$x \mapsto f(x_0) + f'(x_9)(x - x_0).$$

Die "beste" lineare Approximation an f ist die Tangente.
Nicht jede stetige Funktion ist differenzierbar. Sie darf keine "Knicke" haben.

Beispiel. $x \mapsto |x|$ ist nicht differenzierbar in 0, denn für $x < 0$ ist der Differenzenquotient $\frac{-x}{x} = -1$ und für $x > 0$ ist er $\frac{x}{x} = 1$. Die beiden Grenzwerte stimmen nicht überein.

Wir behandlen weitere, interessante Beispiele.

Satz 5.4. *(i) Sei $c \in \mathbb{R}$, $f(x) = c$ konstant. Dann gilt $f' = 0$ auf ganz $\mathbb{R}$.*

(ii) $\exp' = \exp$.

(iii) $\sin' = \cos$.

(iv) $\cos' = \sin$.

Beweis: Für konstante Funktionen verschwinden die Differenzenquotienten.
Es gilt

$$\frac{\exp(x+h) - \exp(h)}{h} = \exp(x)\frac{exp(h) - 1}{h}.$$

Wir setzen die Reihe ein und erhalten

$$\frac{\exp(h) - 1}{h} = \frac{1}{h}(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} h^k - 1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} h^{k-1}.$$

Dies ist eine Potenzreihe mit Konvergenzradius ∞, daher ist die Funktion stetig auf $\mathbb{R}$. Der Grenzwert $h \to 0$ für $h \neq 0$ stimmt mit dem Wert in 0 überein. Dort erhalten wir

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} 0^{k-1} = 1.$$

Insgesamt hat $\exp(x)$ die Ableitung $\exp(x)$.
Wieder rechnen wir mit Reihen und erhalten

$$\frac{\sin(h)}{h} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} h^{2k}.$$

Diese Funktion ist stetig und hat den Grenzwert 0 in 1. Ebenso

$$\frac{\cos(h)-1}{h} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} h^{2k-1}.$$

Diese Funktion ist stetig und hat den Grenzwert 0 in 0. Wir betrachten nun Sinus mit dem Additionstheorem:

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} &= \frac{\cos(x)\sin(h)+\sin(x)\cos(h)-\sin(x)}{h} \\
&= \cos(x)\frac{\sin(h)}{h} + \sin(x)\frac{\cos(h)-1}{h} \\
&\xrightarrow{h\to 0} \cos(x)\cdot 1 + \sin(x)\cdot 0.
\end{aligned}$$

mit dem Grenzwert $\cos(x)$.
Ebenso

$$\begin{aligned}
\frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h} &= \frac{\cos(x)\cos(h)-\sin(x)\sin(h)-\cos(x)}{h} \\
&= \cos(x)\frac{\cos(h)-1}{h} - \sin(x)\frac{\sin(h)}{h} \\
&\xrightarrow{h\to 0} \cos(x)\cdot 0 - \sin(x)\cdot 1
\end{aligned}$$

mit dem Grenzwert $-\sin(x)$. □

Allgemeiner benutzen wir Rechenregeln.

Satz 5.5 (Produkt- und Quotientenregel)**.** *Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}$ Funktionen, die in $x_0 \in D$ differenzierbar sind. Sei $\lambda \in \mathbb{R}$.*
Dann gilt

(i) $f+g$ ist differenzierbar in x_0 mit

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

(ii) λf ist differenzierbar in x_0 mit

$$(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0).$$

(iii) fg ist differenzierbar in x_0 mit

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x) + f(x_0)g'(x_0).$$

(iv) Sei $g(x_0) \neq 0$. Dann ist f/g differenzierbar in x_0 mit

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

Beweis: Seien

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \phi(x)(x - x_0) \\ g(x) &= g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + \psi(x)(x - x_0) \end{aligned}$$

mit stetigen Funktionen ϕ, ψ mit $\phi(x_0) = \psi(x_0) = 0$. Es folgt

$$(f + g)(x) = f(x_0) + g(x_0) + (f'(x_0) + g'(x_0))(x - x_0) + (\phi + \psi)(x)(x - x_0)$$

mit der stetigen Funktion $\phi + \psi$ mit Wert 0 in x_0. Dies ist die erste Formel.
Genauso:

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \phi(x)(x - x_0)][(g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + \psi(x)(x - x_0)] \\ &= f(x_0)g(x_0) + [f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0)](x - x_0) + \eta(x)(x - x_0) \end{aligned}$$

wobei in η die übrigen Terme gesammelt werden, also

$$f(x_0)\psi(x)+f'(x_0)(g'(x_0)+\psi(x)](x-x_0)+\phi(x)[g(x_0)+g'(x_0)(x-x_0)\psi(x)(x-x_0)]$$

Die Funktion ist stetig und hat in x_0 den Wert 0. Dies beweist die Produktformel.
Im Spezialfall $g = \lambda$ konstant erhalten wir die zweite Formel.
Für den Beweis der Quotientenformel gehen wir zur Abwechslung über den Differentialquotienten:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} &= \frac{\frac{f(x+h)g(x)-g(x+h)f(x)}{g(x+h)g(x)}}{h} \\ &= \frac{1}{g(x+h)g(x)}\left[\frac{f(x+h}{h}g(x) - f(x)\frac{g(x+h)}{h}\right] \\ &\xrightarrow{h\to 0} \frac{1}{g(x)^2}[f'(x)g(x) - f(x)g'(x)] \end{aligned}$$

□

Beispiel. Sei $P(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n$ eine Polynomfunktion. Dann ist P auf $\mathbb{R}$ differenzierbar mit Ableitung

$$P'(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n n x^{n-1}$$

Beweis: Wegen der Linearität der Ableitung genügt es den Spezialfall $f(x) = x^n$ zu behandeln. Wir argumentieren mit vollständiger Induktion. Für $n = 0$ ist $x^0 = 1$ mit Ableitung 0. Für $n = 1$ ist $x^1 = x$ mit Ableitung 1. Sei die Formel wahr für n. Mit Produktformel

$$(x^{n+1})' = (x \cdot x^n)' = x'x^n + x(x^n)' = 1x^n + x \cdot n \cdot x^{n-1} = (n + 1)x^n.$$

□

Eine rationale Funktion P/Q mit Polynomfunktionen P, Q ist differenzierbar außerhalb der Nullstellen von Q nach der Quotientenformel.

Satz 5.6 (Ableitung der Umkehrfunktion)**.** *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ streng monotone Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall D. Sei f differenzierbar in $x_0 \in D$ mit $f'(x_0) \neq 0$. Dann ist $f^{-1} : f(D) \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $y_0 = f(x_0)$ mit*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0))} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Beweis: Sei $(y_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in $f(D) \setminus \{y_0\}$ mit Grenzwert y. Dann ist $x_n = f^{-1}(y_n)$ eine Folge in D mit Grenzwert x_0, da f^{-1} stetig ist. Nach Voraussetzung gilt

$$f'(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = \frac{y_n - y_0}{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y_0)}$$

Nach Definition ist die rechte Seite der Kehrwert von $(f^{-1})'(y_0)$. $\square$

Beispiel. Die Ableitung des Logarithmus ist

$$\log'(x) = \frac{1}{\exp'(\log(x))} = \frac{1}{x}$$

Satz 5.7 (Kettenregel)**.** *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : E \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f(D) \subset E$. Sei f differenzierbar in x_0 und g differenzierbar in $f(x_0)$. Dann gilt*

$$(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0)g'(f(x_0)).$$

Beweis: Sei $y_0 = f(x_0)$. Sei $(x_n)_{n\geq 1}$ ein Folge in $D \setminus \{x_0\}$ die gegen x_0 konvergiert. Sei $y_n = f(x_n)$. Da f stetig ist in x_0 konvergiert diese Folge gegen y_0. Nach Voraussetzung gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_n - y_0}{x_n - x_0} = f'(x_0)$$

und

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(y_n) - g(y_0)}{y_n - y_0} = g'(y_0)$$

und mit Grenzwertsätzen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g \circ f(x_n) - g \circ f(x_0)}{x_n - x_0} = \lim_{n\to\infty} \frac{g(y_n) - g(y_0)}{y_n - y_0} \frac{y_n - y_0}{x_n - x_0} = g'(y_0)f'(x_0).$$

Daher existiert der Grenzwert und hat die angegebene Form. $\square$

Beispiel. Sei $a > 0$. Dann ist

$$(a^x)' = \log(a)a^x$$

denn nach Definition

$$\exp(\log(a)x)' = \log(a)\exp'(\log(a)x) = \log(a)\exp(\log(a)x) = \log(a)a^x.$$

Beispiel. Wir betrachten

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Diese Funktion ist stetig in 0. Diese Funktion ist differenzierbar auf $\mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$ mit Ableitung

$$f'(x) = 2x\cos(1/x) + x^2 \frac{-1}{x^2}(-\sin(\frac{1}{x})) = 2x\cos(1/x) + sin(\frac{1}{x}).$$

Diese Funktion hat für $x \to 0$ keinen Grenzwert. In 0 hat der Differenzenquotient

$$\frac{(0+h)^2\cos(1/(0+h) - 0}{h} = h\cos(1/h)$$

den Grenzwert 0. Daher ist f überall differenzierbar, die Ableitung ist aber nicht stetig.

Anwendungen

Definition 5.8. *Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $x_0 \in (a, b)$. Wir sagen f hat in x_0 ein* lokales Minimum (Maximum)*, wenn es $\varepsilon > 0$ gibt mit $f(x) \geq f(x_0)$ (bzw. $f(x) \leq f(x_0)$ für alle $x \in (a, b)$ mit $|x - x_0| < \varepsilon$. Wir sagen f hat ein* lokales Extremum *in x_0, wenn f in x_0 ein lokales Minimum oder Maximum hat.*

Satz 5.9. *Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar in x_0 und x_0 ein lokales Extremum. Dann gilt $f'(x_0) = 0$.*

Beweis: Wir behandeln des Fall eines Maximums. Nach Voraussetzung gibt es $\varepsilon > 0$ so dass $f(x) \leq f(x_0)$ für alle $x \in (a, b)$ mit $|x - x_0| < \varepsilon$. Wir betrachten den Differenzenquotienten

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Für $0 < h < \varepsilon$ ist der Zähler kleiner gleich 0 und der Nenner positiv, der Quotient also kleiner gleich 0. Für $-\varepsilon < h < 0$ ist der Zähler kleiner gleich 0 und der Nennger negativ, dier Quotient also grö0er gleich 0. Nach Voraussetzung existiert der Grenzwert für $h \to 0$. Er ist sowohl kleiner als auch größer gleich 0, also 0. □

Das Verschwinden der Ableitung ist eine notwendig, aber nicht hinreichende Bedingung für die Existenz eines Extremums, wie das Beispiel $f(x) = x^3$ zeigt. Man erhält hinreichende Kriterien durch Überprüfen der höheren Ableitungen. Dafür benötigen wir aber noch etwas Vorarbeit.

Satz 5.10 (Satz von Rolle)**.** *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) = f(b)$. Sei f differenzierbar in (a, b). Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = 0$.*

Beweis: Maximum und Minimum werden in Punkten $\xi, \xi' \in [a, b]$ angenommen, da f stetig ist. Ist ξ oder ξ' kein Randpunkt, so haben wir einen Punkt mit verschwindender Ableitung und sind fertig.

Sind beides Randpunkte, so ist die Funktion auf $[a, b]$ kleiner gleich und größer gleich $f(a) = f(b)$, also konstant. Dann verschwindet die Ableitung. □

Korollar 5.11 (Mittelwertsatz)**.** *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf (a, b). Dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$, so dass*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$

Es gibt einen Punkt, in dem die Tangentensteigung gleich der Sekantensteigung im Intervall ist.

Beweis: Wir betrachten

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Sie hat in $x = a$ den Wert $f(a) - 0$ und in $x = b$ den Wert $f(b) - f(b) + f(a)$. Wir wenden den Satz von Rolle an und erhalten einen Punkt $\xi \in (a, b)$ mit

$$0 = F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Dies ist die Behauptung □

Korollar 5.12. *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf (a, b) mit $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$. Dann ist f konstant.*

Beweis: Sei f nicht konstant. Seien $a' < b'$ mit $f(a') \neq f(b')$. Nach dem Mittelwertsatz gibt es ein $\xi \in (a', b')$ mit

$$f'(\xi) = \frac{f(b') - f(a')}{b' - a'} \neq 0.$$

□

Korollar 5.13. *Sei : $[a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf (a, b). Wenn für alle $x \in (a, b)$ gilt $f'(x) \geq 0$ (bzw. $f'(x) > 0$ bzw. $f'(x) \leq 0$ bzw. $f'(x) < 0$) so ist f monoton wachsend (bzw. streng monoton wachsend bzw. monoton fallend bzw. streng monoton fallend).*

Beweis: Wir betrachten nur den erste Fall. Sei also $f'(x) \geq 0$ auf (a, b). Angenommen, die Funktion ist nicht monoton wachsend. Dann gibt es $a' < b'$ in $[a, b]$ mit $f(a') > f(b')$. Nach dem Mittelwertsatz gibt es $\xi \in [a', b']$ mit

$$f'(\xi) = \frac{f(b') - f(a')}{b' - a'} < 0.$$

Dies ist ein Widerspruch. □

Beispiel. Sei $f(x) = \exp(x)$. Dann ist $f'(x) = \exp(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Die Funktion ist streng monoton wachsend.

Wir können damit den Fall von Sinus und Cosinus nachtragen.

Korollar 5.14. *Auf* $[0, \pi/2]$ *ist Sinus streng monoton wachsend und Cosinus streng monoton fallend.*

Beweis: Auf diesem Intervall ist $\cos' = -\sin$ nach Lemma 4.26 negativ, also die Funktion streng monoton fallend. Da $\pi/2$ die kleinste Nullstelle ist, und $\cos(0) = 1$, ist die Funktion auf dem Intervall $[0, \pi/2)$ positiv. Wegen $\sin' = \cos$ bedeutet dies, dass die Sinusfunktion streng monoton wächst. $\square$

Satz 5.15. *Sei* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *differenzierbar in* (a, b). *Sei* $x_0 \in (a, b)$, *so dass* f' *differenzierbar in* x_0 *und*

$$f'(x_0) = 0 \text{ und } f''(x_0) > 0$$

(bwz. $f''(x_0) < 0$*). Dann hat* f *in* x_0 *ein isoliertes Minimum (bwz. Maximum).*

Beispiel. $f(x) = x^2$ hat $f'(x) = 2x$ und $f''(x) = 2$. Die erste Ableitung verschwindet in 0, die zweite ist positiv. Daher ist 0 ein Minimum.

Beweis: Sei $f''(x_0) > 0$. Nach Definition ist

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}.$$

Da dieser Grenzwert existiert, gibt es ein $\varepsilon > 0$ so dass

$$\frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} > 0 \text{ für alle } x \in (a, b), |x - x_0| < \varepsilon$$

Wegen $f'(x_0) = 0$ bedeutet dies $f'(x)/(x - x_0) > 0$ für diese x. Auf dem Intervall $(x_0 - \varepsilon, x_0]$ ist die Ableitung negativ und die Funktion f streng monoton fallend. Auf $[x_0, x_0 + \varepsilon)$ ist sie streng monoton steigend. Zusammen ist x_0 in Minimum. $\square$

Beispiel. Sei $f = \sin$, $f' = \cos$, $f'' = -\sin$. In $\pi/2$ verschwindet f', aber $f''(\pi/2) = -1$, also ist dies ein Maximum von Sinus.

Definition 5.16. *Sei* $f : D \to \mathbb{R}$ *eine Funktion. Wir definieren die* n-te Ableitung

$$f^{(n)} : D \to \mathbb{R}$$

rekursiv als $f^{(0)} = f$ *und* $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$, *falls diese Ableitungen existieren.*

Grenzwertformeln

Eine andere Anwendung gibt es für Grenzwerte von Funktionen.

Satz 5.17 (2. Mittelwertsatz)**.** *Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und in (a, b) differenzierbar. Dann gibt es $\xi \in (a, b)$ so dass*

$$g'(\xi)(f(b) - f(a)) = f'(\xi)(g(b) - g(a)) \ .$$

Beweis: Wir betrachten die Hilfsfunktion

$$h(x = (f(b) - f(a))(g(x) - g(a)) - (g(b) - g(a))(f(x) - f(a))$$

und wenden den Satz von Rolle an. Es existiert also $\xi \in (a, b)$ mit

$$0 = h'(\xi) = (f(b) - f(a))g'(\xi) - (g(b) - g(a))f'(\xi).$$

Dies ist die Behauptung. □

Korollar 5.18 (Regel von l'Hôpital)**.** *Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen. Sei $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) = g(x_0) = 0$ Wenn $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, dann ist dieser Grenzwert gleich $\lim_{x\to x_0, x\neq x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$.*

Beweis: Sei $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Sei $(x_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in $[a, b] \smallsetminus x_0$ mit Grenzwert x_0. Wir wenden den 2. Mittelwertsatz der Differentialrechnung an auf das Intervall $[x_n, x_0]$ und erhalten ein Element $\xi_n \in (x_n, x_0)$ mit

$$g'(\xi_n)(f(x_n) - 0) = f'(\xi_n)(g(x_n) - 0)$$

Mit $x_n \to x_0$ folgt auch $\xi_n \to x_0$ und daher

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

□

Beispiel. Es gilt

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = \cos 0 = 1.$$

Wir erhalten eine Formel zurück, die wir bei der Berechnung der Ableitung direkt beweisen mussten.

Analoge Formeln gibt es auch für $\lim_{x\to\infty} f(x) \to \infty$, indem wir x durch $1/x$ ersetzen oder f durch $1/f$:

(i) Falls $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$, so ist

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

falls der rechte Grenzwert existiert.

Beweis: l'Hôpital für $f(1/x)$ und $x_0 = 0$. □

(ii) Wenn $\lim_{x\to x_0} |g(x)| \to \infty$, dann gilt

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

falls der rechte Grenzwert existiert.

Beweis: (Quelle: engl. Wikipedia) Wir betrachten den links- und rechtsseitigen Grenzwert getrennt und behandeln nur $x \in (a, x_0)$. Sei

$$m(x) = \inf_{\xi\in(x,x_0)} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \quad M(x) = \sup_{\xi\in(x,x_0)} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Beide Werte existieren, falls x nahe bei x_0 ist, da der Grenzwert $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert. Ab jetzt betrachten wir nur solche x. Für jedes y zwischen x und x_0 gilt nach dem 2. Mittelwertsatz

$$m(x) \le \frac{f(y) - f(x)}{g(y) - g(x)} \le M(x)$$

(der Ausdruck in der Mitte ist nämlich $f'(\xi)/g'(\xi)$ für ein ξ zwischen x und y). Wir schreiben um zu

$$\frac{f(y) - f(x)}{g(y) - g(x)} = \frac{\frac{f(y)}{g(y)} - \frac{f(x)}{g(y)}}{1 - \frac{g(x)}{g(y)}}$$

Für y gegen x_0 gehen $f(x)/g(y)$ und $g(x)/g(y)$ gegen 0, also

$$m(x) \le \liminf_{y\to x_0} \frac{f(y)}{g(y)} \le \limsup_{y\to x_0} \frac{f(y)}{g(y)} \le M(x)$$

Für x gegen x_0 erhalten wir dann Gleichheit. □

(iii) Vorsicht mit dem Fall $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$, $\lim_{x\to x_0} g(x) \to \infty$. Der Wert ist *nicht* $\lim_{x\to x_0} f'(x)g'(x)$!Trotzdem kann es natürlich mit einer der beiden anderen Formeln behandelt werden.

Beispiel. Sei $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$, $g(x) = \sum_{i=0}^n b_i x^n$ mit $b_n \neq 0$. Dann gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} = \frac{a_n}{b_n}$$

Beispiel. Es gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

und daher

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k} = \lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{x} = \lim_{x\to\infty} \exp(x^{-1}\log(x)) = \exp\left(\lim_{x\to\infty} x^{-1}\log(x)\right) = \exp(0) = 1.$$

Potenzreihen

Um die Ableitung einer Potenzreihe zu berechnen benötigen wir wieder ein allgemeines Kriterium für Funktionenfolgen.

Satz 5.19. *Sei $(f_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von differenzierbaren Funktionen auf $[a,b]$. Die Folge $(f_n')_{n\geq 1}$ sei gleichmäßig konvergent und die Folge $(f_n)_{n\geq 1}$ an wenistens einer Stelle $x_0 \in [a,b]$ konvergent. Dann konvergiert $(f_n)_{n\geq 1}$ gleichmäßig gegen eine differenzierbare Funktion f, und es gilt*

$$f' = \lim_{n\to\infty} f_n'.$$

D.h. unter diesen Voraussetzungen vertauschen Differentiation und Grenzwert.

Beweis: Wir beginnen mit der Konvergenz und verifizieren das Cauchy-Kriterium:

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x) - f_n(x) - f_m(x_0) + f_n(x_0)| + |f_m(x_0) - f_n(x)|$$

Auf die Funktion $f_m - f_n$ und das Intervall von x nach x_0 wenden wir den Mittelwertsatz an. Es gilt also

$$|f_m(x) - f_n(x) - f_m(x_0) + f_n(x_0)| = |f_m'(\xi) - f_n'(\xi)||x - x_0|$$

für ein ξ zwischen x und x_0. Sei $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung konvergiert die Folge f_n' gleichmäßig und die Folge $(f(x_0))_{n\geq 1}$. Daher gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$|f_n'(\xi) - f_m'(\xi)| < \varepsilon, \quad |f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \varepsilon$$

für alle $n, m \geq n_0$. Zusammen gilt

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon(b-a) + \varepsilon.$$

Daher konvergiert die Folge. Man beachte, dass die Abschätzung unahbhängig von x ist, die Folge der f_n konvergiert also gleichmäßig.
Nun behandeln wir die Ableitung in $c \in [a,b]$. Es gilt

$$f_n(x) = f_n(c) + f_n'(c)(x-c) + \phi_n(x)(x-c)$$

wobei ϕ_n stetig und $\phi_n(c) = 0$. Wir werden zeigen, dass $(\phi_n)_{n\geq 1}$ gleichäßig gegen eine Grenzfunktion ϕ konvergiert. Diese ist dann ebenfalls stetig, $\phi(c) = \lim_{n\to\infty} \phi_n(c) = 0$ und

$$\begin{aligned}\lim_n f_n(x) &= \lim_{n\to\infty} f_n(c) + \lim_{n\to\infty} f_n'(c)(x-c) + \lim_{n\to\infty} \phi_n(x)(x-c)\\ &= f(c) + \lim_{n\to\infty} f_n'(c)(x-c) + \phi(x)(x-c).\end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass f differenzierbar ist in c mit Ableitung $\lim_{n\to\infty} f_n'(c)$.
Wir behandeln nun die Folge $(\phi_n)_{n\geq 1}$. Es gilt

$$\phi_m(x) - \phi_n(x) = \frac{f_m(x) - f_m(c) - f_n(x) + f_n(c)}{x-c} - f_m'(c) + f_n'(c)$$

Auf die Funktion $f_m - f_n$ wenden wir den Mittelwertsatz an und erhalten ein ξ zwischen x und c mit

$$\frac{f_m(x) - f_m(c) - f_n(x) + f_n(c)}{x - c} = f'_m(\xi) - f'_n(\xi).$$

Zusammen

$$|\phi_m(x) - \phi_n(x)| \leq |f'_m(\xi) - f'_n(\xi)| + |f'_m(c) - f'_n(c)|$$

Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es n_0, so dass für $n, m \geq n_0$ gilt

$$|f'_m(\xi) - f'_n(\xi)| < \varepsilon, \quad |f'_m(c) - f'_n(c)| < \varepsilon$$

also

$$|\phi_m(x) - \phi_n(x)| < 2\varepsilon.$$

□

Wir wenden diesen Satz an auf eine Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k.$$

Es ist $f_n = \sum_{k=0}^{n} a_k(x - x_0)^k$ und daher

$$f'_n = \sum_{k=0}^{n} k a_k x^{k-1}.$$

Die Folge der Ableitungen ist ebenfalls eine Potenzreihe mit Konfergenzradius der Kehrwert von

$$\limsup_{k \to infty} \sqrt[k]{k a_k}.$$

Es gilt

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k} = \lim_{x\to\infty} \exp(x^{-1} \log x) = \exp(0) = 1$$

wie wir als Beispiel für l'Hôpital hergeleitet hatten. Daher haben die beiden Potenzreihen denselben Konvergenzradius. Auf jedem kleineren abgeschlossenen Intervall konvergieren sie gleichmäßig und wir können unser Kriterium anwenden. Zusammen haben wir gezeigt:

Satz 5.20. *Sei $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius r. Dann ist f auf $|x - x_0| < r$ differenzierbar mit Ableitung*

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k (x - x_0)^{k-1}.$$

Beispiel. Wir leiten die geometrische Reihe ab

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

und erhalten für $|x| < 1$

$$-\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} kx^{k-1}.$$

Auch die anderen Ableitungen der elementaren Funktionen erhalten wir zurück:

Beispiel.

$$\begin{aligned}
\exp'(x) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\right)' = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{kx^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \exp(x) \\
\sin'(x) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}\right)' = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(2k+1)}{(2k+1)!} x^{2k} = \cos(x) \\
\cos'(x) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k(2k)}{(2k)!} x^{2k-1} = -\sin(x)
\end{aligned}$$

Satz 5.21 (Taylor-Formel)**.** *Sei* $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ *Potenzreihe mit Konvergenzradius* $r > 0$*. Dann gilt*

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}.$$

Die Koeffizienten sind eindeutig durch die Funktion bestimmt.

Beweis: Wir berechnen induktiv alle Ableitungen von f und werten dann in x_0 aus. Dies zeigt die Formel. Die Koeffizienten sind also durch die Funktion bestimmt. □

Beispiel. (i) Im Falle der Exponentialfunktion haben wir $\exp^{(k)}(0) = \exp(0) = 1$ und daher $a_k = \frac{1}{k!}$.

(ii) Für $f(x) = \log(x)$ und $x_0 = 1$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
f^{(k)}(x) &= (-1)^{k-1}(k-1)!x^{-k}, \\
f^{(k)}(1) &= (-1)^{k-1}(k-1)! && \text{für } k \geq 1, \\
a_k &= \frac{(-1)^{k-1}}{k} && \text{für } k \geq 1, \\
a_0 &= \log(1) = 0
\end{aligned}$$

und daher

$$\log(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(x-1)^k$$

(wenn die Funktion durch eine Reihe darstellbar ist, Übungsaufgabe.) Oft schreibt man die Formel in der Form

$$-\log(1-y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y^k}{k}$$

Konvexität

Definition 5.22. *Sei D ein Intervall, $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Sie heißt* konvex*, wenn für alle $x_1, x_2 \in D$ und alle $\lambda \in (0,1)$ gilt*

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

Sie heißt konkav*, wenn die Ungleichun $\geq$ erfüllt ist.*

Konvex/konkav bedeutet, dass der Graph der Funktion unterhalb/oberhalt der Sekante läuft.

Satz 5.23. *Sei $D = (a,b)$ und $f : D \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Dann ist f genau dann konvex, wenn $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in D$.*

Beweis: Sei $f'' \geq 0$. Dann ist f' monoton wachsend. Seien $x_1, x_2 \in D$mit $x_1 < x_2$. Sei $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$. Dann gilt $x_1 < x < x_2$. Wir wenden den Mittelwertsatz an auf die Intervalle $[x_1, x]$ und $[x, x_2]$. Es gibt also $\xi_1 \in (x_1, x)$ und $\xi_1 \in (x, x_2)$, so dass

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2) = \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

Wegen $x - x_1 = (1-\lambda)(x_2 - x_1)$ und $x_2 - x = \lambda(x_2 - x_1)$ folgt

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{1-\lambda} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{\lambda}$$

und daher

$$f(x) \leq (1-\lambda) f(x_2) + \lambda f(x_1)$$

Die Funktion ist konvex.

Sei nun umgekehrt die Funktion konvex. Angenommen, es gelte nicht $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in D$. Sei $x_0 \in D$ mit $f''(x_0) < 0$. Wir setzen $c = f'(x_0)$ und

$$\phi(x) = f(x) - f(x_0) - c(x - x_0)$$

Die Funktion ist zweimal differenzierbar mit $\phi'(x_0) = 0$ und $\phi''(x_0) = f''(x_0) < 0$. Also hat ϕ in x_0 ein isoliertes lokales Maximum. Es gibt also $h > 0$, so dass $x_0 \pm h \in D$ und

$$\phi(x \pm h) < \phi(x_0)$$

Es folgt

$$f(x_0) = \phi(x_0) > \frac{1}{2}(\phi(x+h) + \phi(x-h))$$

Dies verletzt die Konvexitätsbedingung für $\lambda = 1/2$ und $x_1 = x - h$, $x_2 = x + h$. □

Als Anwendung von Konvexitätsbetrachtungen erhalten wir die Dreiecksungleichung, die wir bereits mühsam zu Fuß bewiesen haben. Die folgenden Relationen werden sehr wichtig in der Funktion

Lemma 5.24. *Seien $p, q \in (1, \infty)$ mit $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Dann gilt für alle $x, y > 0$ die Ungleichung*

$$x^{1/p} y^{1/q} \leq \frac{x}{p} + \frac{y}{p}$$

Für $p = q = 2$ ist dies die bekannte Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel.

Beweis: Wir verwenden den Logarithmus $\log : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$. Seine 2. Ableitung ist $-1/x^2$, also die Funktion konkav. Es gilt mit $\lambda = p^{-1}$, $(1 - \lambda) = q^{-1}$

$$\log(p^{-1}x + q^{-1}y) \geq p^{-1}\log(x) + q^{-1}\log(y)$$

Anwenden der monotonen Funktion exp liefert die Behauptung. □

Sei $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ ein Vektor. Wir definieren seine *p-Norm* als

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p}$$

Den komplexen Absolutbetrag erhalten wir also als Spezialfall $x \in \mathbb{R}^2$.

Satz 5.25 (Höldersche Ungleichung)**.** *Seien $p, q \in (1, \infty)$ mit $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Seien $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ und $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{C}^n$. Dann gilt*

$$\sum_{k=1}^{n} |x_i y_i| \leq \|x\|_p \|y\|_q$$

Beweis: Ohne Einschränkung ist $\|x\|_p \neq 0$ und $\|y\|_q \neq 0$. Wir setzen $\xi_i = |x_i|^p / \|x\|_p$ und $\eta_i = |y_i|^q / \|y\|_q$. Dann ist

$$\sum \xi_i = \sum \eta_i = 1$$

Wir wenden den Hilfsatz an auf ξ_i und η_i und erhalten

$$\frac{|x_i y_i|}{\|x\|_p \|y\|_q} \leq \frac{\xi_i}{p} + \frac{\eta_i}{q}$$

Wir summieren über alle i und erhalten

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{|x_i y_i|}{\|x\|_p \|y\|_q} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Die ist die Behauptung. □

Korollar 5.26 (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)**.** *Für $x, y \in \mathbb{C}^n$ gilt*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|_2 \, \|y\|_2 \, .$$

Hierbei ist

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{x}_i y_i$$

das *Standardskalarprodukt auf* $\mathbb{C}^n$.

Beweis: Wir setzen $p = q = 2$ in der Hölderschenungleichung für $\overline{X}$ und y. $\square$

Satz 5.27 (Minkowskische Ungleichung)**.** *Sei $p \in (1, \infty)$. Dann gilt für $x, y \in \mathbb{C}^n$*

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p \, .$$

Beweis: Für $p = 1$ folgt der Satz aus der Dreiecksungleichun für komplexe Zahlen, die wiederum aus $p = 2$ und dem reellen Fall folgt. Sei also nun $p > 1$. Wir definieren q durch $p^{-1} + q^{-1} = 1$, also $pq = p + q$. Sei $z \in \mathbb{C}^n$ mit $z_i = |x_i + y_i|^{p-1}$ für $i = 1, \ldots, n$. Dann ist $z_i^q = |x_i + y_i|^{(p-1)q} = |x_i + y_i|^p$. Es folgt

$$\|z\|_q = \|x + y\|_p^{p/q}$$

Nach Dreiecksungleichung und der Hölderschen Ungleichung gilt

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i||z_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i z_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i z_i| \leq \|x\|_p \, \|z\|_q + \|y\|_p \, \|z\|_q$$

Nach der Definition von z_i ist die linke Seite

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i||x_i + y_i|^{p-1} = \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p = \|x + y\|_p^p \, .$$

Nach unserer Berechung von $\|z\|_q$ gilt also insgesamt

$$\|x + y\|_p^p \leq (\|x\|_p + \|y\|_p) \, \|x + y\|_p^{p/q}$$

Wegen $p - p/q = 1$ folgt die Behauptung. $\square$

Kapitel 6

Integration

Es gibt verschiedene Arten, an das Thema Integration heranzugehen. Wir führen hier den Begriff des *Riemann-Integrals* ein. Ziel ist es, die Fläche unter dem Graphen einer Funktion zu berechnen. Das ist ganz leicht für stückweise konstante Funktionen. Wir nähern eine allgemeine Funktion durch solche an.

Treppenfunktionen

Definition 6.1. *Eine Funktion $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt* Treppenfunktion*, wenn es eine Unterteilung $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$ und Konstanten $c_1, \ldots, c_n$ gibt, so dass*

$$\phi(x) = c_k \text{ für } t_{k-1} < x < t_k$$

(Die Funktionswerte in den t_k sind beliebig.) Wir bezeichnen mit $T(a,b)$ die Menge der Treppenfunktionen auf $[a,b]$.

Lemma 6.2. *Die Menge der Treppenfunktionen auf $[a,b]$ ist ein reeller Vektorraum, d.h. sie ist abgeschlossen unter Addition und unter Multiplikation mit reellen Zahlen.*

Beweis: Seien ϕ, ϕ' Treppenfunktionen. Zu ϕ gehören Teilpunkte $t_0, t_1 \ldots, t_n$ von $[a,b]$. Zu ψ gehören Teilpunkte $t'_0, t'_1 \ldots, t'_{n'}$. Sei $\{s_0, s_1, \ldots, s_N\}$ die Vereinigungsmenge. Wir sortieren aufsteigend, so dass $s_0 < s_1, \cdots < s_N$. Auf dem Intervall (s_{k-1}, s_k) sind sowohl ϕ als auch ϕ' konstant, also auch $\phi + \phi'$. Die Aussage bezüglich der Skalarmultiplikation ist noch einfacher. □

Definition 6.3. *Sei $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion. Sei $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ eine Unterteilung, so dass ϕ auf (t_{k-1}, t_k) konstant mit Funktionswert c_k für $1 \leq k \leq n$. Wir definieren*

$$\int_a^b \phi = \sum_{k=1}^n c_k(t_k - t_{k-1}),$$

das Integral *der Funktion ϕ.*

Lemma 6.4. *Das Integral ist wohldefiniert, d.h. unabhängig von der Wahl der Unterteilung.*

Beweis: Seien $t_0 < \cdots < t_n$ und $t'_0 < \dots t'_{n'}$ zwei Unterteilungen für eine Treppenfunktion ϕ. Wie im letzten Beweis sei $s_0 < \cdots < s_N$ die "Vereinigungsunterteilung".
Wir müssen also zeigen, dass

$$\sum_{k=1}^{n} c_k(t_{k-1}, t_k) = \sum_{i=1}^{N} d_i(s_{i-1} - s_i)$$

Für jedes k gibt es einen Index $i(k)$ mit $t_k = s_{i(k)}$. Dann ist $s_{i(k-1)}) < s_{i(k-1)+1} < \dots s_{i(k)}$ eine Unterteilung von $[t_{k-1}, t_k]$. Ausserdem ist $c_k = d_i$ für $i(k-1) < i \leq i(k)$, denn beides ist nach Definition der Funktionswert von ϕ auf (t_{k-1}, t_k). Wir erhalten daher

$$\sum_{i=i(k-1)+1}^{i(k)} d_i(s_i - s_{i-1}) = c_k \sum_{i=i(k-1)+1}^{i} (s_i - s_{i-1}) = c_k(t_k - t_{k-1}).$$

Durch Aufsummieren erhält man also die gewünschte Identität. $\square$

Satz 6.5. *Die Abbildung*

$$\int_a^b : T(a,b) \to \mathbb{R}$$

ist linear und monoton, d.h.

(i) $\int_a^b (\phi + \psi) = \int_a^b \phi + \int_a^b \psi$ *für alle* $\phi, \psi \in T(a,b)$,

(ii) $\int_a^b \lambda\phi = \lambda \int_a^b \phi$ *für alle* $\phi \in T(a,b)$, $\lambda \in \mathbb{R}$,

(iii) $\int_a^b \phi \leq \int_a^b \psi$, *wenn* $\phi(x) \leq \psi(x)$ *für alle* $x \in [a,b]$.

Beweis: Für die erste Aussage wählen wir eine Unterteilung des Intervalls $t_0 < \cdots < t_n$, so dass ϕ und ψ konstant auf den Intervallen (t_{k-1}, t_k) sind mit Funktionswert c_k und d_k. Dann ist nach Definition

$$\begin{aligned}\int_a^b (\phi + \psi) &= \sum_{k=1}^{n} (c_k + d_k)(t_k - t_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} c_k(t_k - t_{k-1}) + \sum_{k=1}^{n} d_k(t_k - t_{k-1}) = \int_a^b \phi + \int_a^b \psi.\end{aligned}$$

Ebenso einfach folgen die beiden anderen Aussagen. $\square$

Wir schreiben $f \leq g$, falls $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a,b]$.

Definition 6.6. *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Wir definieren das* Unterintegral

$$\int_{a*}^{b} f = \sup_{\phi \in T(a,b), \phi \leq f} \int_{a}^{b} \phi$$

und das Oberintegral

$$\int_{a}^{b*} f = \inf_{\phi \in T(a,b), \phi \geq f} \int_{a}^{b} \phi.$$

Eine Funktion heißt Riemann-integrierbar*, falls Ober- und Unterintegral übereinstimmen. In diesem Fall definieren wir das* (Riemann)-Integral

$$\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \int_{a}^{b*} f = \int_{a*}^{b} f.$$

Beispiel. Treppenfunktionen sind Riemann-integrierbar. Ober- und Unterintegral stimmen mit dem vorher definierten $\int_a^b f$ überein.

Wir werden zeigen, dass jede stetige Funktion Riemann-integrierbar ist. Dafür brauchen wir etwas Vorbereitung.

Lemma 6.7. *Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Ober- und Unterintegral sind wohldefiniert. Es gilt:*

(i) $\int_{a*}^{b} f \leq \int_{a}^{b*} f$,

(ii) $\int_{a*}^{b} f = -(\int_{a}^{b*}(-f))$,

(iii) $\int_{a}^{b*}(f+g) \leq \int_{a}^{b*} f + \int_{a}^{b*} g$,

(iv) $\int_{a*}^{b}(f+g) \geq \int_{a*}^{b} f + \int_{a*}^{b} g$,

(v) $\int_{a}^{b*}(\lambda f) = \lambda \int_{a}^{b*} f$ *für alle* $\lambda > 0$,

(vi) $\int_{a*}^{b}(\lambda f) = \lambda \int_{a*}^{b} f$ *für alle* $\lambda > 0$,

(vii) $\int_{a}^{b*}(\lambda f) = \lambda \int_{a*}^{b} f$ *für alle* $\lambda < 0$,

(viii) $\int_{a*}^{b}(\lambda f) = \lambda \int_{a}^{b*} f$ *für alle* $\lambda < 0$.

(ix) *Sei $f \leq g$. Dann gilt* $\int_{a*}^{b} f \leq \int_{a^*}^{b} g$.

(x) *Sei $f \leq g$. Dann gilt* $\int_{a}^{b*} f \leq \int_{a}^{b^*} g$.

Beweis: Da f beschränkt ist, ist die Menge über die Infimum und Supremum gebildet werden nicht leer. Alle Treppenfunktionen in der Berechnung des Unterintegrals sind kleiner gleich f, alle Treppenfunktionen in der Berechnung des

Oberintegrals sind größer gleich f. Wegen der Monotonie des Integrals von Treppenfunktionen ist auch das Supremum der einen Menge von Integralen kleiner dem Infimum der anderen Menge von Integralen.
Aus $\phi \leq f$ folgt $-\phi \geq -f$. Daher geht beim Übergang von f zu $-f$ die Unter- in die Obersumme über und umgekehrt.
Sind $\phi, \psi \in T(a,b)$ mit $\phi \geq f$ und $\psi \geq g$, so gilt $\phi + \psi \geq f + g$, daher ist

$$\int_a^b \phi + \int_a^b \psi = \int_a^b (\phi + \psi) \geq \int_a^{b*} (f+g)$$

Beim Übergang zum Infimum über ϕ und ψ erhalten wird die Aussage.
Die Aussage über das Unterintegral folgt aus der für das Oberintegral für $-f$ und $-g$.
Sei nun $\lambda > 0$. Ist $\phi \in T(a,b)$ mit $\phi \geq f$, so ist $\lambda\phi \geq \lambda f$ und daher

$$\lambda \int_a^b \phi = \int_a^b \lambda f \geq \int_a^{b*} f.$$

Hieraus folgt

$$\lambda \int_a^{b*} f \geq \int_a^{b*} f.$$

Ist $\psi \in T(a,b)$ mit $\psi \geq \lambda f$, so ist $\lambda^{-1}\psi \geq f$ und daher

$$\lambda^{-1} \int_a^b \psi = \int_a^b \lambda^{-1}\psi \geq \int_a^{b*} f$$

Hieraus folgt

$$\lambda^{-1} \int_a^{b*} f \geq \int_a^{b*} f.$$

Die beiden Ungleichungen zusammen ergeben die Behauptung. Die übrigen Fälle werden genauso gezeigt. □

Korollar 6.8. *Riemann-integrierbare Funktionen bilden einen reellen Vektorraum, d.h. die Menge ist abgeschlossen unter Addition und Multiplikation mit reellen Zahlen.*
$\int_a^b$ *ist eine monotone lineare Abbildung auf Riemann-integrierbaren Funktionen, d.h.* $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *Riemann-integrierbar und* $\lambda \in \mathbb{R}$ *gilt*

(i) $\int_a^b (f+g)(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x,$

(ii) $\int_a^b \lambda f(x)\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$

(iii) Aus $f \leq g$ *folgt* $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$

Beweis: Seien f und g Riemann-integrierbar. Wir betrachten die Summe. Wir erhalten $\geq$ für das Unterintegral und $\leq$ für das Oberintegral. Zuammen:

$$\int_{a*}^{b} f + \int_{a*}^{b} g \leq \int_{a*}^{b} (f+g) \leq \int_{a}^{b*} (f+g) \leq \int_{a}^{b*} f + \int_{a}^{b*} g.$$

Da f und g Riemann-intergrierbar sind, sind die beiden äußeren Terme gleich. Daher steht an allen Stellen Gleichheit. Dies bedeutet, dass $f + g$ Riemann-integrierbar ist, und die angegebene Formel gilt.

Der Fall λf wird analog behandelt und die Monotonie folgt analog aus den entsprechenden Aussagen für Ober- und Unterintegral. □

Lemma 6.9. *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Die Funktion f ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ Treppenfunktionen $\phi, \psi \in T(a, b)$ mit $\phi \leq f \leq \psi$ und*

$$\int_a^b \psi - \int_a^b \phi < \varepsilon.$$

Beweis: Sei f Riemann-integrierbar mit Integral I, $\varepsilon > 0$. Dann gibt es nach Definition des Unterintegrals eine Treppenfunktion $\phi \leq f$ mit $I - \int_a^b \phi < \varepsilon/2$. Genauso gibt es eine Treppenfunktion $\psi \geq f$ mit $\int_a^b \psi - I < \varepsilon$. Zusammen gilt die gewünschte Abschätzung.

Sei umgekehrt die Bedingung mit den Treppenfunktionen erfüllt. Sei $\varepsilon > 0$, ϕ, ψ Treppenfunktionen mit $\phi \leq f \leq \psi$ und $\int_a^b \psi - \int_a^b \phi < \varepsilon$. Dann folgt

$$\int_a^{b*} f - \int_{a*}^{b} f < \varepsilon.$$

Da diese Abschätzung für alle ε gilt, sind die beiden Zahlen gleich und die Funktion f ist Riemann-integrierbar. □

Damit erhalten wir die ersten interessanten Beispiele.

Satz 6.10. *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monoton und beschränkt. Dann ist f Riemann-integrierbar.*

Beweis: Wir behandlen ohne Einschränkung den Fall, f monoton wachsend. Wir überprüfen das Kriterium. Wir unterteilen $[a, b]$ äquivdistant in n Teile der Länge $1/n$. Seien $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ die Teilpunkte. Wir definieren

$$\begin{aligned} \phi(x) &= f(t_{k-1}) && \text{für } x \in (t_{k-1}, t_k] \\ \psi(x) &= f(t_k) && \text{für } x \in (t_{k-1}, t_k] \end{aligned}$$

Beides sind Treppenfunktionen. Es gilt $\phi \leq f \leq psi$, da f monoton wächst. Weiterhin ist

$$\int_a^b \psi - \int_a^b \phi = \sum_{k=1}^n f(t_k)\frac{1}{n} - \sum_{k=1} nf(t_{k-1})\frac{1}{n}$$
$$= \frac{1}{n}(f(t_n) - f(t_0)) = \frac{1}{n}(f(b) - f(a)$$

Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es $n \geq 1$, so dass diese Differenz kleiner ε wird. Die beweist die Behauptung. □

Beispiel. exp ist Riemann-integrierbar.

Wir tragen noch nach:

Lemma 6.11. *Sei $c \in [a, b]$ ein Zwischenpunkt. Eine Funktion auf $[a, b]$ ist genau dann eine Treppenfunktion auf $[a, b]$, wenn sie eine Treppenfunktion auf $[a, c]$ und $[c, b]$ ist.*
Sei $\phi \in T(a, b)$. Dann gilt

$$\int_a^b \phi = \int_a^c \phi + \int_c^b \phi.$$

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann ist

$$\int_{a*}^b f = \int_{a*}^c f + \int_{c*}^b f, \quad \int_a^{b*} f = \int_a^{c*} f + \int_c^{b*} f.$$

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann ist f genau dann Riemann-integrierbar auf $[a, b]$, wenn es Riemann-integrierbar auf $[a, c]$ und $[c, b]$. Es gilt dann

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Beweis: Die Aussage über Treppenfunktion ist klar. Hieraus folgt sofort die Aussage über Ober- und Unterintegral und die Formel für das Riemann-integral. Ist f Riemann-integrierbar auf $[a, c]$ und $[c, b]$, dann auch auf $[a, b]$. Wir behandeln nun die Rückrichtung. Wir haben

$$\int_{a*}^c f \leq \int_a^{c*} f$$
$$\int_{c*}^b f \leq \int_c^{b*} f$$
$$\int_{a*}^c f + \int_{c*} f = \int_{a*}^b f = \int_a^{b*} f = \int_a^{c*} f + \int_c^{b*} f$$

Daraus folgt dann auch

$$\int_{a*}^c f = \int_a^{c*} f, \quad \int_{c*}^b \int_c^{b*} f$$

□

Stetige Funktionen

Wir wollen dasselbe Kriterium auch auf stetige Funktionen anwenden. Dafür müssen wir ausnutzen, dass stetige Funktionen auf beschränkten abgeschlossenen Intervallen *gleichmäßig stetig* sind, siehe Satz 3.12: zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$, so dass $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ für alle x, x' mit $|x - x'| < \delta$.

Satz 6.12. *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f Riemann-integrierbar.*

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Nach Satz 3.12 ist f auf $[a, b]$ gleichmäßig stetig. Es gibt also $\delta > 0$, so dass

$$|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

Wir wählen Teilpunkte $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, so dass die Teilintervalle eine Breite kleiner δ haben. Sei

$$m_k = \min_{x \in [t_{k-1}, t_k]} f(x), M_k = \max_{x \in [t_{k-1}, t_k]} .$$

Diese beiden Zahlen existieren und werden angenommen nach dem Satz über die Existenz von Maximum und Minimum (Satz 3.16). Da $|x - x'| < \delta$ für $x, x' \in [t_{k-1}, t_k]$, folgt $M_k - m_k < \varepsilon$. Wir definieren

$$\begin{aligned} \phi(x) &= m_k && \text{für } x \in [t_{k-1}, t_k) \\ \psi(x) &= M_k && \text{für } x \in [t_{k-1}, t_k). \end{aligned}$$

Dies sind Treppenfunktionen mit $\phi \le f \le \psi$. Weiter ist

$$\int_a^b \psi - \int_a^b \phi = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k)(t_k - t_{k-1}) \le \varepsilon \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1}) = \varepsilon(b - a).$$

Das Kriterium aus Lemma 6.9 ist erfüllt. □

Satz 6.13 (Mittelwertsatz der Integralrechnung)**.** *Seien $f, h : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $h \ge 0$. Dann gibt es $\xi \in [a, b]$, so dass*

$$\int_a^b f(x)h(x)\mathrm{d}x = f(\xi) \int_a^b h(x)\mathrm{d}x.$$

Insbesondere ($h = 1$) gibt es $\xi \in [a, b]$, so dass

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b - a).$$

Beweis: Sei $m = \min_{x \in [a,b]} f(x)$, $M = \max_{x \in [a,b]} f(x)$. Nach dem Satz über die Existenz von Maximum und Minumum gibt es diese beiden Werte. Es gilt also $m \le f(x) \le M$ für $x \in [a, b]$ und wegen $h(x) \ge 0$ folgt

$$mh(x) \le f(x)h(x) \le Mh(x).$$

Wegen der Monotonie des Riemann-Integrals folgt

$$m\int_a^b h(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)h(x)\mathrm{d}x \leq M\int_a^b h(x)\mathrm{d}x.$$

Daher gibt es $\mu \in [m, M]$, so dass

$$\int_a^b f(x)h(x)\mathrm{d}x = \mu\int_a^b h(x)\mathrm{d}x.$$

Nach dem Zwischenwertsatz gibt es $\xi \in [a, b]$ mit

$$\mu = f(\xi).$$

Das ist die Behauptung. □

Theorem 6.14 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)**.** *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Sei $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$. Dann ist F differenzierbar mit $F' = f$.*

Man schreibt oft $\int_a f(t)\mathrm{d}t$ oder sogar abkürzend $\int f(t)\mathrm{d}t$. Man nennt diese Funktion *das unbestimmte Integral.*

Beispiel.

$$\sin = \int \cos$$

Beweis des Hauptsatzes: Wir berechnen den Differentialquotienten

$$\lim_{h\to 0}\frac{\int_a^{x+h} f(t)\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\mathrm{d}t}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}t.$$

Nach dem Mittelwertsatz gibt es ξ_h zwischen x und $x + h$ mit

$$\int_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}t = f(\xi_h)h.$$

Wir setzen ein:

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}t = \lim_{h\to 0} f(\xi_h).$$

Es ist $\lim_{h\to 0}\xi_h = x$. Da f stetig ist, folgt $\lim_{h\to 0} f(\xi_h) = f(x)$. Dies ist die Behauptung. □

Definition 6.15. *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Eine* Stammfunktion *von f ist eine differenzierbare Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit F'.*

Der Hauptsatz besagt also, dass $\int_a^x f$ eine Stammfunktion von f ist, falls f stetig. Insbesondere existiert eine Stammfunktion.

Lemma 6.16. *Seien F_1, F_2 Stammfunktionen von $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Dann ist $F_1 - F_2$ konstant.*

Beweis: $(F_1 - F_2)' = f - f = 0$. Die Aussage folgt aus Korollar 5.12. □

Korollar 6.17. *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, F eine Stammfunktion. Dann gilt*

$$\int_{a'}^{b'} f(x)\mathrm{d}x = F(b') - F(a')$$

für $a \leq a' \leq b' \leq b$.

Beweis: Ohne Einschränkung ist $a = a'$, $b = b'$. Dann gibt es $c \in \mathbb{R}$ mit $F(x) = \int_a^x f(x)\mathrm{d}x + c$ für alle $x \in [a, b]$. Es folgt

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + c - \int_a^a f(x)\mathrm{d}x - c = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

□

Wir schreiben

$$F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Die Formel wird daher zu

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b.$$

Rechenregeln und Beispiele

Alles, was wir über Ableitungen wissen, wird nun zu Aussagen über Integrale.

Beispiel. (i) Für $s \neq 1$ gilt $\int x^s \mathrm{d}x = \frac{x^{s+1}}{s+1}$

(ii) $\int x^{-1}\mathrm{d}x = \log(|x|)$ für $x \neq 0$. (Für negative x hat man $\log(|x|)' = \log(-x)' = -(-x)^{-1}$)

(iii) $\int \exp(x)\mathrm{d}x = \exp$

(iv) $\int \sin(x)\mathrm{d}x = -\cos$

(v) $\int \frac{1}{\cos^2(x)}\mathrm{d}x = \tan(x)$

Aus der Kettenregel für die Ableitung erhalten wir die Substitutionsregel:

Satz 6.18 (Substitutionsregel)**.** *Sei $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ stetig. Sei $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $g([a, b]) \subset [c, d]$. Dann gilt:*

$$\int_a^b f(g(t))\mathrm{d}t = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\mathrm{d}x.$$

Mit dem Leibniz-Kalkül schreibt man den Sachverhalt

$$\mathrm{d}g = \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t$$

Beweis: Sei $F : [c, d] \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion. Wir leiten $F \circ g$ ab und erhalten

$$(F \circ g)'(t) = F'(g(t))g'(t).$$

Nach dem Hauptsatz folgt

$$\int_a^b F'(g(t))g'(t)\mathrm{d}t = F \circ g\Big|_a^b = F\Big|_{g(a)}^{g(b)} = \int_{g(a)}^{g(b)} f\mathrm{d}x.$$

$\square$

Die Substitutionsregel erlaubt die Berechnung einer Vielzahl von leichten Variationen bekannter Integrale.

Beispiel. (i) $\int_a^b f(t+c)\mathrm{d}t = \int_{a+c}^{b+c} f(x)\mathrm{d}x$ (Substitution $x = t + x$)

(ii) Für $c \neq 0$ gilt $\int_a^b f(ct)\mathrm{d}t = c^{-1}\int_{ca}^{cb} f(x)\mathrm{d}x$ (Substitution $x = ct$, im Leibniz-Kalkül: $\mathrm{d}x = c\mathrm{d}t \Rightarrow \mathrm{d}t = c^{-1}\mathrm{d}x$)

(iii) $\int_a^b tf(t^2)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{a^2}^{b^2} f(x)\mathrm{d}x$ (Substitution $x = t^2$, $\mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t$)

(iv) Sei f auf $[a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit f nullstellenfrei. Dann gilt

$$\int_a^b \frac{f'(t)}{f(t)}\mathrm{d}t = \log|f|\Big|_a^b$$

Alle rationalen Funktionen P/Q sind elementar integrierbar. Der Trick besteht darin, den Nenner in lineare und quadratische Faktoren zu faktorisieren und dann mit *Partialbruchzerlegung* zu arbeiten. Wir behandeln ein ganz einfaches Beispiel.

Beispiel. Sei $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$. Es ist $1 - x^2 = (1 - x)(1 + x)$. Wir lösen

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{\alpha}{1-x} + \frac{\beta}{1+x} = \frac{\alpha + \alpha x + \beta - \beta x}{1-x^2}$$

durch $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ und daher

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\int_a^b \frac{1}{1-t}\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_a^b \frac{1}{1+t}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}(-\log|1-t|)\Big|_a^b + \frac{1}{2}\log|1+t|\Big|_a^b \\ &= \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\Bigg|_a^b\end{aligned}$$

Für die Ableitung kennen wir die Produktregel

$$(fg)' = f'g + fg'$$

Hieraus wird eine Formel für $\int f'g$.

Satz 6.19 (Partielle Integration)**.** *Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt*

$$\int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x = fg\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x.$$

Beweis: Sei $F = fg$. Wir wenden die Produktregel an und den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

$$f(x)g(x)\Big|_a^b = \int_a^b F'(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x + \int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x.$$

□

Beispiel. (i) Wir berechnen $\int x^2 \sin(x)\mathrm{d}x$ mit $g(x) = x^2$ und $f'(x) = \sin(x)$, $f(x) = -\cos(x)$, also

$$\int_a^b x^2 \sin(x)\mathrm{d}x = -x^2\cos(x)\Big|_a^b + \int_a^b 2x\cos(x)\mathrm{d}x$$

Und dies wiederum mit $g(x) = 2x$, $f'(x) = \cos(x)$, $f(x) = \sin(x)$:

$$\int_a^b 2x\cos(x)\mathrm{d}x = 2x\sin(x)\Big|_a^b - \int_a^b 4\sin(x)\mathrm{d}x$$

Zusammen also

$$\int_a^b x^2\sin(x)\mathrm{d}X - x^2\cos(x) + 2x\sin(x) + 4\cos(x)\Big|_a^b$$

(ii) Die Stammfunktion von $\log(x)$ bestimmen wir mit $g(x) = \log(x)$, $f'(x) = 1$, $f(x) = x$:

$$\int \log(x)\mathrm{d}x = x\log(x) - \int x\frac{1}{x}\mathrm{d}x = x\log(x) - x$$

(iii) Wir berechnen $\int \sin^2(x)\mathrm{d}x$. Mit $f' = \sin x$, $g = \sin x$ erhalten wir $f = -\cos x$, $g' = \cos x$

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x dx &= -\cos x \sin x - \int -\cos x\cos x dx \\ &= -\cos x\sin x + \int \cos^2 x \\ &= -\cos x\sin x + \int (1 - \sin^2 x)dx \\ &= -\cos x\sin x + x - \int \sin^2 x dx\ .\end{aligned}$$

Diese Gleichung lösen wir auf zu

$$\int \sin^2 x dx = -\frac{1}{2}(x - \cos x \sin x) \ .$$

Beispiel. Sei $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ eine rationale Funktion mit teilerfremden Polynomen p und q mit $\deg(p) < \deg(q)$. Eine *Partialbruchzerlegung* besteht aus folgenden Schritten:

(i) Finden einer Faktorisierung von $q(x)$, d.h.

$$q(x) = c(x - b_1)^{k_1} \cdots (x - b_r)^{k_r} \ \cdots q_1(x)^{l_1} \cdots q_s(x)^{l_s}$$

mit paarweise verschiedenen, reellen Nullstellen b_j der Vielfachkeit k_j und paarweise verschiedenen, quadratischen Polynomen q_j, die keine reellen Nullstellen besitzen. Eine solche Faktorisierung existiert, da $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen ist.

(ii) Für jede Nullstelle $b \in \{b_1, \cdots, b_r\}$ der Vielfachkeit k und jedes quadratische Polynom $Q \in \{q_1, \cdots, q_s\}$ der Vielfachheit l bilden wir Funktionen der Form

$$\frac{A_1}{x-b}, \qquad \frac{A_2}{(x-b)^2}, \qquad \cdots, \quad \frac{A_k}{(x-b)^k},$$
$$\frac{B_1 x + C_1}{Q(x)}, \quad \frac{B_2 x + C_2}{(Q(x))^2}, \quad \cdots, \quad \frac{B_l x + C_l}{(Q(x))^l}$$

wobei A_i, B_i, C_i reelle Koeffizienten sind. Diese Funktionen heißen *Partialbrüche*.

(iii) Man setzt nun die rationale Funktion $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ als Summe obiger Partialbrüche an, wobei die Koeffizienten A_i, B_i, C_i zu bestimmen sind:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{k_i} \frac{A_j}{(x-b_i)^j} + \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{l_i} \frac{B_j x + C_j}{(Q_i)^j}$$

Die dabei auftretenden Integrale sind alle lösbar. Wir verzichten darauf, alle Fälle durchzugehen.

Beispiel. Sei R eine rationale Funktion. Dann kann man das Integral

$$\int R(e^{ax})\,\mathrm{d}x$$

durch die Substitution $t = e^{ax}, \mathrm{d}x = \frac{1}{at}\mathrm{d}t$ auf das Integral

$$\int R(t)\frac{1}{at}\mathrm{d}t$$

zurückführen und somit berechnen, denn $\frac{R(t)}{at}$ ist wiederum eine rationale Funktion.

Bemerkung. Anders als beim Differenzieren gibt es keinen Algorithmus zur Bestimmung von Stammfunktionen der elementaren Funktionenen - also derer, die aus Polynomen, trigonometrischen Funktionen, Exponentialfunktionen und Logarithmus zusammengesetzt sind. Führen die eigenen Versuche nicht zu Ziel, so gibt es zwei Methoden: Nachschlagen in einer Formelsammlung (moderner: Verwendung eines Mathematikprogramms wie Mathematica oder Maple etc.) oder numerische Integration. Wir verzichten hier, Ihnen in langen Rechnungen alle Herleitungen vorzuführen.

Uneigentliche Integrale

Wir wollen nun auch über halboffene oder offene Intervalle integrieren. Wir behandlen ausführlich $[a, \infty)$.

Definition 6.20. *Sei $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ auf jedem Teilintervall $[a, R]$ Riemann-integrierbar. Wir definieren*

$$\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty} \int_a^R f(x)\mathrm{d}x$$

falls dieser Grenzwert existiert. Wir sagen dann, das uneigentliche Integral $\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ *konvergiert.*

Analog definiert man $\int_\infty^b$ und $\int_a^c$ für $f : [a, c) \to \mathbb{R}$.

Beispiel. Wir behandeln $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^s}$. Es ist

$$\int_1^R x^{-s}\mathrm{d}x = (-s+1)^{-1}x^{-s+1}\Big|_1^R = (1-s)^{-1}R^{-s+1} - (1-s)^{-1}1^{-s+1}$$

Für $R \to \infty$ hat der erste Term den Grenzwert 0, falls $s > 1$. Das uneigentliche Integral konvergiert dann gegen $\frac{1}{1-s}$.
Ebenso ist

$$\int_0^1 x^{-s}\mathrm{d}x = (1-s)^{-1}x^{-s+1}\Big|_0^1$$

Für $s < 1$ konvergiert die untere Grenze gegen 0, das uneigentliche Integral konvergiert.
Für $s = 1$ ist die Stammfunktion $\log(x)$ und das uneigentliche Integral konvergiert in keinem der beiden Fälle.

Wie im Fall von Summen sprechen wir auch von *bestimmter Divergenz*, also

$$\inf_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x} \to \infty.$$

Für $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ definiert man $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^c f(x)\mathrm{d}x$ für einen Zwischenwert $c \in (a, b)$, falls die beiden Integrale existieren. In diesem Fall ist der Wert unabhängig von der Wahl von c.

Definition 6.21. *Für $x > 0$ sei $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$.*

Lemma 6.22. *Die Gamma-Funktion ist wohldefiniert und erfüllt*

$$x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$$

für $x \in (0,\infty)$ und $\Gamma(n+1) = n!$ für $n \in \mathbb{N}$.

Beweis: Der Integrand ist auf $(0,\infty)$ positiv. Wesentlich für die Existenz der beiden Grenzwert ist daher die Beschränktheit. Für $t > 0$ ist

$$t^{x-1}e^{-t} \leq t^{x-1}$$

und daher

$$\int_0^1 t^{x-1}e^{-t} \leq \int_0^1 t^{x-1}\mathrm{d}t = x^{-1}t^x\Big|_0^1 = x^{-1}$$

Anderseits ist für $k \geq x+1$ natürliche Zahl

$$\lim_{t\to\infty} t^{x+1}e^{-t} \leq \lim_{t\to\infty} \frac{t^k}{e^t} = 0$$

(mehrfache Anwendung von l'Hôpital). Es gibt also t_0, so dass für $t \geq t_0$ gilt

$$t^{x+1}e^{-t} \leq 1 \Leftrightarrow t^{x-1}e^{-t} \leq t^{-2}$$

Dies impliziert

$$\int_{t_0}^\infty t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t \leq \int_{t_0}^\infty t^{-2}\mathrm{d}t$$

und das rechte Integral konvergiert. Damit sind die uneigentlichen Integrale $\Gamma(x)$ definiert.

Wir betrachten nun die Funktionalgleichung. Wir argumentieren mit partieller Integration für $g(t) = t^x$, $f(t) = -e^{-t}$, $f'(t) = e^{-t}$:

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t}\mathrm{d}t = -t^x e^{-t}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty xt^{x-1}(-e^{-t})\mathrm{d}t = 0 - 0 + x\Gamma(x).$$

(Hier gehen wieder die gleichen Grenzwerte ein, die wir uns überlegt hatten).

Wir berechnen

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty t^0 e^{-t}\mathrm{d}t = -e^{-t}\Big|_0^\infty = 0 + 1.$$

Hieraus folgt mit der Funktionalgleichung

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. □

Satz 6.23 (Integralvergleichskriterium)**.** *Sei $f : [1,\infty) \to (0,\infty)$ monoton fallend. Die Reihe $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ konvergiert genau dann, wenn das uneigentliche Integral $\int_1^\infty f(x)\mathrm{d}x$ konvergiert.*

Beweis: Als monoton fallende Funktion ist f Riemann-integrierbar. Da $f > 0$ ist die Folge der Partialsummen $\sum_{n=1}^{N}$ monoton wachsend. Zu zeigen ist, dass sie monoton ist. Ebenso ist das unbestimmte Integral $F(R) = \int_1^R f(x)\mathrm{d}x$ monoton wachsend. Zu zeigen ist die Beschränktheit.
Wegen der Monotonie gilt

$$f(n-1) \geq \int_{n-1}^{n} f(x)\mathrm{d}x \geq f(n).$$

Wir summieren von $n = 2$ bis N und herhalten daher

$$\sum_{k=1}^{N-1} \int_1^N f(x)\mathrm{d}x \geq \sum_{n=2}^{N} f(n)$$

Die Partialsummen sind genau dann beschränkt, wenn es die Integrale sind. $\square$

Beispiel. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ konvergiert für $s > 1$.
Der Grenzwert wird mit $\zeta(s)$ bezeichnet. Dies ist die berühmte *Riemannsche Zeta-Funktion.* Sie lässt sich eindeutig zu einer komplex differenzierbaren Funktion auf $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ fortsetzen. Es gibt eine Funktionalgleichung

$$\zeta(1-s) = \frac{2}{(2\pi)^s} \cos(\frac{\pi s}{2})\Gamma(s)\zeta(s).$$

Ihre Eigenschaften sind eng verbunden mit der Verteilung der Primzahlen. Den Zusammenhang sieht man mit der Identität

$$\prod_p \frac{1}{1-p^{-s}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

wobei p die Primzahlen durchläuft.
Eine der bedeutensten offenen Vermutungen betrifft ihre Nullstellen. Bekannt sind die "trivialen" Nullstellen in den negativen geraden Zahlen. Alle "nicht-trivialen" sollen auf der Gerade $\Re(s) = 1/2$ liegen.

Integration von Funktionenfolgen

Potenzreihen können wir bereits integrieren, da wir wissen, was beim Ableiten passiert. Denoch wollen wir auch allgemein verstehen, wie sich Integration und Grenzwerte von Funktionenfolgen verhalten.

Satz 6.24. *Sei $(f_n)_{n\geq 1}$ eine gleichmäßig konvergente Folge von stetigen Funktionen von $[a, b]$ nach $\mathbb{R}$. Dann ist $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ Riemann-integrierbar mit*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x.$$

Beweis: Wir wissen bereits, dass f ebenfalls stetig ist, also integrierbar. Sei $\varepsilon > 0$. Da die Folge gleichmäßig konvergiert, gibt es $n_0 \geq 1$, so dass $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in [a, b]$ und $n \geq n_0$. Für diese n gilt Es gilt

$$\left| \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x \right| = \int_a^b |f - f_n(x)|\, \mathrm{d}x \leq (b-a) \max_{x\in[a,b]} |f(x) - f_n(x)| \leq (b-a)\varepsilon.$$

Die Folge der Integral konvergiert gegen das Integral der Grenzfunktion. □

Hier haben wir eine "Dreiecksungleichung für Integrale" benutzt, die wir noch nachtragen müssen.

Definition 6.25. *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir definieren $f_+, f_- : [a, b] \to \mathbb{R}$ durch $f_+(x) = \max(0, f(x)$, $f_(x) = \min(0, f(x))$*

Lemma 6.26. *Die Funktion f ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn f_+ und f_- es sind. Dann ist auch $|f|$ Riemann-integrierbar, und es gilt*

$$\left| \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.$$

Beweis: Offensichtlich ist $f = f_+ + f_-$. Sind f_+ und f_- integrierbar, dann auch f. Wir behandeln die Umkehrung mit dem Kriterium aus Lemma 6.9. Da f Riemann-integrierbar ist, gibt es Treppenfunktionen ϕ, ψ mit $\phi \leq f \leq \psi$ und

$$\int_a^b (\psi - \phi) < \varepsilon.$$

Dann sind ϕ_+, ψ_+ Treppenfunktionen mit $\phi_+ \leq f_+ \leq \phi_+$. Wir behaupten, dass außerdem

$$\psi_+ - \phi_- < \phi - \psi.$$

Diese Ungleichung ist in jedem der drei möglichen Fälle $0 \leq \phi(x)$, $\phi(x) \leq 0 \leq \psi(x)$, $\psi(x) \leq 0$ erfüllt. Wir erhalten also

$$\int_a^b (\psi_+ - \phi_+) \leq \int_a^b (\psi - \phi) < \varepsilon.$$

Nach unserem Kriterium ist f_+ integrierbar. Wegen $f_- = f - f_-$ ist es dann auch f_-.

Es ist $|f| = f_+ - f_-$, also ist auch diese Funktion integrierbar. Es folgt

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b (f_+(x) + f_-(x))\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_a^b f_+(x)\mathrm{d}x + \int_a^b f_-(x)\mathrm{d}x\right| \\
&\leq \left|\int_a^b f_+(x)\mathrm{d}x\right| + \left|\int_a^b f_-(x)\right| \\
&= \int_a^b f_+(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f_-(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b |f|(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$\square$

Kapitel 7

Reihenentwicklungen

Taylor-Entwicklung

Wir erinnern uns an die Definition der Ableitung:

$$f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + \phi(x)(x - x_0)$$

mit ϕ stetig in x_0, $\phi(x_0) = 0$. Es war dann $a = f'(x_0)$ berechenbar als Differenzialquotient. Dies wollen wir mit Polynomen höherer Ordnung wiederholen: Wir suchen nach einer Darstellung

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x - x_0)^n + \phi_n(x)(x - x_0)^n$$

mit $\phi_n(x_0) = 0$ und ϕ_n stetig. Dies ist die beste mögliche Approximation von f durch ein Polynom vom Grad n. Wir kennen die Form der a_i bereits aus dem Fall, dass f durch eine Potenzreihe darstellbar ist. Nach Satz 5.21 gilt

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}.$$

Wir nennen

$$T_n(x, x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

das *n-te Taylorpolynom*.

$$T_f(x, x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

heißt *Taylor-Reihe von f*. Wir wollen nun den Zusammenhang zwischen Funktion und Taylor-Reihe verstehen.

Satz 7.1 (Taylor-Entwicklung)**.** *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ $n+1$-mal stetig differenzierbar. Für $x_0, x \in I$ gilt*

$$f(x) = T_n(x, x_0) + R_{n+1}(x, x_0)\,,$$

wobei das Restglied $R_{n+1}(x, a)$ *die Darstellungen*

$$\begin{aligned} R_{n+1}(x, x_0) &= \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\; dt, \\ R_{n+1}(x, x_0) &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \end{aligned}$$

für ein ξ zwischen x und x_0 hat.

Beweis: Wir beginnen mit der ersten Form des Restgliedes. Der Fall $n = 0$ ist der Hauptsatz der Differential- und Integralrechung Nach Definition von Stammfunktionen gilt

$$f(x) = f(a) + \int_{x_0}^{x} f'(t)\mathrm{d}t$$

wie behauptet. Sei die Formel für n bewiesen. Wir führen eine partielle Integration aus mit $u'(t) = (x-t)^n$, $v(t) = f^{(n)}(t)$ und erhalten

$$\begin{aligned} R_{n+1}(x, x_0) &= \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{-1}{n!}\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}\bigg|_{x_0}^{x} - \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} \frac{(t-x)^{n+1}}{n+1} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{(n+1)!}(x-x_0)^n + R_{n+2}(x, x_0) \end{aligned}$$

Die zweite Darstellung des Restgliedes erhalten wir duch den Mittelwertsatz der Integralrechnung 6.13

$$\begin{aligned} \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t &= \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi)\int_{x_0} x(x-t)^n \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1} \end{aligned}$$

wobei ξ ein geeignetes Element von $[x_0, x]$ ist. □

Der Fehler

$$|f(x) - T_n(x, x_0)| = |R_{n+1}(x, x_0)|$$

kann genau abgeschätzt werden, z.B. auf dem Intervall $[x_0 - R, x_0 + R]$ durch

$$\sup_{[x_0-R, x_0+R]} |f^{(n+1)}(x)| \frac{R^{n+1}}{(n+1)!}$$

Beispiel. Sei $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$. Alle Ableitungen sind beschränkt und daher

$$|R_{n+1}(x, x_0)| \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

Für jedes x konvergieren die Restglieder gegen 0.

Wir sagen, f ist *in eine Potenzreihe entwickelbar mit Entwicklungspunkt* x_0 , wenn $f(x) = T_f(x, x_0)$. Mit anderen Worten, die Restglieder konvergieren gegen 0.
Dies ist nicht immer der Fall! Tatsächlich ist es eher die Ausnahme.

Beispiel. Wir betrachten $f(x) = \exp(-\frac{1}{x^2})$. Die Funktion lässt sich durch 0 zu einer stetigen Funktion auf $\mathbb{R}$ fortsetzen. Die Ableitungen von f haben alle die Form $P(x)f(x)$, wobei P eine rationale Funktion ist, z.B.

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} f, f'' = \frac{-6}{x^4} f + \frac{2}{x^3} f' \ .$$

Wegen $\lim_{x \to 0} P(x)f(x) = 0$ ist f dann auch in 0 unendlich oft differenzierbar mit $f^{(n)}(0) = 0$. Es ist also

$$T_f(x, 0) = 0 \neq f \ .$$

Lemma 7.2. *Sei f auf dem Intervall I beliebig oft differenzierbar und sei $x_0 \in I$. Seien $A, B \in \mathbb{R}$ Konstanten mit*

$$\left| f^{(n)}(x) \right| \leq A\, B^n \qquad \text{für alle } x \in I,\ n \in \mathbb{N}.$$

Dann konvergiert die Taylor-Reihe $T_f(x, x_0)$ gegen die Funktion.

Beweis: Seien A, B wie im Lemma. Es folgt

$$|R_n(x, x_0)| = \left| \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} (x - x_0)^n \right| \leq A \frac{B^n}{n!} \cdot |x - x_0|^n \ .$$

Da die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B^n |x - x_0|^n}{n!}$$

konvergiert, ist $A\frac{B^n}{n!} \cdot |(x - a)^n$ eine Nullfolge. □

Für die Berechnung der Reihenentwicklung gibt es mehrere Ansätze:

(i) Aus der Taylor-Formel mit Restgliedabschätzung

(ii) Bekannte Reihen differenzieren oder integrieren.

(iii) Summe und/oder Produkt bekannter Reihen liefert neue Reihenentwicklungen

(iv) Potenzreihen in einander einsetzen

Satz 7.3 (Binomialreihe)**.** *Für alle x mit $|x| < 1$ und alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt:*

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \,,$$

wobei

$$\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot \cdots \cdot(\alpha-k+1)}{k!}$$

Beweis: Sei $g(x)$ die rechte Seite. Wir berechnen den Konvergenzradius mit der Quotientenformel $R^{-1} = \lim |a_{k+1}/a_k|$ und erhalten wegen

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot \cdots \cdot(\alpha-(k+1)+1)k!}{(k+1)!\alpha(\alpha-1)\cdot \cdots \cdot(\alpha-k+1)} = \lim_{k\to\infty} \frac{\alpha-k}{k+1} \to -1$$

den Konvergenzradius 1.
Sei nun $-1 < x < 1$. Es folgt

$$\begin{aligned}
g(x) &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots \\
g'(x) &= \alpha + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1\cdot 2!}2x + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{2!}x^2 + \cdots \\
xg'(x) &= \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1!}x^2 + \cdots \\
g'(x)(1+x) &= \alpha + \alpha x(\alpha-1+1) + \alpha(\alpha-1)\left(\tfrac{\alpha-2}{2}+1\right)x^2 + \cdots \\
&= \alpha\left(1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots\right) \\
&= \alpha g(x)
\end{aligned}$$

Hieraus folgt dann für

$$\begin{aligned}
h(x) :&= \frac{g(x)}{(1+x)^\alpha} \\
h'(x) &= \frac{g'(x)(1+x)^\alpha - g(x)\alpha(1+x)^{\alpha-1}}{(1+x)^{2\alpha}} \\
&= \frac{(1+x)^{\alpha-1}\left[g'(x)(1+x) - g(x)\alpha\right]}{(1+x)^{2\alpha}} = 0
\end{aligned}$$

Die Funktion h ist also konstant. Im Punkt 0 gilt $h(0) = g(0) = 1$, also

$$1 = \frac{g(x)}{(1+x)^\alpha} \ .$$

□

Die Formel aus Satz 7.3 enthält als Spezialfälle die klassische binomische Formel, aber auch die Reihenentwicklung von $\sqrt{1+x}$ etc.

Fourier-Reihen

Definition 7.4. *Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt* periodisch mit Periode p*, falls*

$$f(x+p) = f(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beispiele sind sin und cos (beide mit Periode 2π), aber auch $x \mapsto C\sin(x+y)$, $x \mapsto \cos(x/2)$.

Wir betrachten im Folgenden $p = 2\pi$. Die Ergebnisse gelten analog für jede andere Periode $p \neq 0$. Integrale über komplexwertige Funktionen werden berechnet als Integrale über Real- und Imaginärteil getrennt.

Definition 7.5. *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ Riemann-integrierbar und 2π-periodisch.*

(i) Die Zahlen

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f}(x) \exp(-inx) \mathrm{d}x, \textit{für } n \in \mathbb{Z}$$

heißen die Fourier-Koeffizienten *zu f.*

(ii) Die Reihe

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \exp(inx) + \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n \exp(inx)$$

heißt die Fourier-Reihe *zu f.*

Ist f reell-wertig, so können wir zerlegen wir dies in Real- und Imaginärteil Die Reihe lautet dann

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

mit den Fourierkoeffizienten

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) \mathrm{d}x, \text{für } n \in \mathbb{N}_0$$
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) \mathrm{d}x \text{für } n \in \mathbb{N}$$

Wann ist eine Funktion als Fourier-Reihe darstellbar?

Grundidee: Die 2π-periodischen Funktionen, Riemann-integrierbaren Funktionen bilden einen Vektorraum V mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} \overline{f}(x) g(x) \mathrm{d}x$$

Die Elemente $e_n = \exp(inx)$ für $n \in \mathbb{Z}$ bilden darin ein Orthogonalsystem. In einem allgemeinerein, Grenzwert-Sinn, sind sie eine Basis für die beliebig oft differenzierbaren Funktionen. Die Formel für die Koffezienten ist die Formel, mit der man die Elemente eines Vektorraums in einer Orthonormalbasis ausdrückt.

$$v = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, v \rangle e_i.$$

Tatsächlich ist nach Definition

$$c_n = \langle e_n, f \rangle.$$

Der richtige Grenzwertbegriff in diesem Zusammenhang ist weder punktweise, noch gleichmäßige Konvergenz. Wir setzen dafür die *Norm* zu dem Skalarprodukt wie immer

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle}$$

Lemma 7.6. *Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ beide 2π-periodisch und Riemann-integrierbar. Dann gilt*

$$\|f + g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2 .$$

Beweis: Es genügt, diese Eigenschaft für Treppenfunktionen zu verfizieren (Übungsaufgabe). In diesem Fall folgt sie aus der gewöhnlichen Dreiecksungleichung. □

Definition 7.7. *Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ für $n \geq 1$ 2π-periodisch und Riemann-integrierbar. Wir sagen die Folge $(f_n)_{n \geq 1}$* konvergiert im quadratischen Mittel *gegen f, wenn*

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_2 = \lim_{n \to infty} \int_0^{2\pi} |f(x) - f_n(x)|^2 \mathrm{d}x = 0$$

Offensichtlich impliziert gleichmäßige Konvergenz auch Konvergenz im quadratischen Mittel. Sie impliziert *nicht* punktweise Konvergenz.

Theorem 7.8 (Fourier-Entwicklung)**.** *Sei f eine 2π-periodische Funktion und Riemann-integrierbar. Dann konvergiert die Fourier-Reihe zu f im quadratische Mittel gegen f. Ist f stetig differenzierbar, so konvergiert die Fourier-Reihe sogar gleichmäßig gegen f.*

Wir beginnen mit den Orthogonalitätsrelationen.

Lemma 7.9 (Orthogonalität)**.** *Seien $n, m \in \mathbb{Z}$. Dann gilt*

$$\langle e_n, e_m \langle = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

Beweis: Es ist

$$\langle e_n, e_m\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{e_n}(x)e_m(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp(ix(m-n))\mathrm{d}x.$$

Für $n = m$ ist der Integrand konstant 1 und das Integral hat den Wert 1. Für $n \neq m$ sind Realteil bzw. Imaginärteil des Integranden von der Form $\cos(kx)$ bzw. $\sin(kx)$ für ein ganzzahliges $k \neq 0$. Aus Symmetriegründen verschwindet das Integral über die volle Periodenlänge. □

Wir schreiben ab jetzt V für den Vektorraum der Riemann-integrierbaren und 2π-periodischen Funktionen.

Lemma 7.10. *Sei $f \in V$ mit den Fourierkoeffizienten c_k, $k \in \mathbb{Z}$. Dann gilt für jedes $n \geq 0$:*

$$\left\| f - \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k \right\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2.$$

Beweis: Wir setzen g für die Partialsumme und berechnen

$$\langle f, g\rangle = \sum_{k=-n}^{n} c_k\langle f, e_k\rangle = \sum_{k=-n}^{n} c_k\overline{c_k} = \sum_{k=-n}^{n} |c_n|^2$$

und

$$\langle g, g\rangle = \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2$$

daher

$$\begin{aligned}\langle f-g, f-g\rangle &= \langle f, f\rangle - \langle f, g\rangle - \langle g, f\rangle + \langle g, g\rangle \\ &= \|f\|_2^2 - \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 - \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 + \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2\end{aligned}$$

□

Korollar 7.11 (Besselsche Ungleichung)**.** *Sei f Riemann-integrierbar und 2π-periodisch mit Fourier-Koeffizienten c_k, $k \in \mathbb{Z}$. Dann gilt*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 \leq \|f\|_2^2.$$

Es gilt Gleichheit genau dann, wenn die Fourier-Reihe im quadratischen Mittel gegen f konvergiert.

Beweis: Nach dem Lemma gilt die Ungleichung für jedes n, also im Limes. Man kann es lesen als Formel für die Norm des Unterschieds von Partialsumme und Funktion. Die Reihe konvergiert genau dann im quadratischen Mittel, wenn diese Norm gegen 0 geht. □

Konvergenz der Fourierreihe. Der Konvergenzbeweis geht in drei Schritten:

(i) $f(x) = 1$ für $0 \leq x < a$, $f(x) = 0$ für $a \leq x < 2\pi$.

(ii) $f = \phi$ eine Treppenfunktion.

(iii) f beliebig.

Wir beginnen mit dem ersten Schritt. Nach Definition ist

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^a e\mathrm{d}x = \frac{a}{2\pi}$$

und für $k \neq 0$

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^a e^{-ikx}\mathrm{d}x = \frac{i}{2\pi k}e^{-ikx}\Big|_0^a = \frac{i}{2\pi k}(e^{-ika} - 1).$$

Für $k \neq 0$ ist daher

$$|c_k|^2 = \frac{1}{4\pi^2 k^2}(e^{-ika} - 1)(e^{ika} - 1) = \frac{2 - 2\cos(ka)}{4\pi^2 k^2}$$

Man beachte, dass für k und $-k$ der selbe Wert auftaucht. Daraus erhalten wir

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 = \frac{a}{2\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \cos(ka)}{\pi^2 k^2}$$

Der Wert dieser Reihe ist bekannt (Übungsaufgabe), nämlich

$$\frac{a}{2\pi} = \|f\|_2^2 .$$

Nach dem Kriterium mit der Besselschen Ungleichung folgt die Konvergenz im quadratischen Mittel.

Durch Linearkombinationen erhalten wir hieraus den Fall beliebiger Treppenfunktionenen, mit einem Approximationsargument den Fall von beliebigen Riemann-integrierbaren Funktionen. Für Details verweisen wir auf Forster, §23. (Hinweis: Dreieckungleichung) □

Beweis im stetig differenzierbaren Fall. Wir betrachten die stetige Funktion f'. Für ihre Fourierkoeffizienten γ_k gilt die Besselsche Ungleichung

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\gamma_k|^2 \leq \|f'\|_2^2$$

Durch partielle Integration erhalten wir hieraus die Fourier-Koeffizienten für f:

$$c_k = \frac{-i\gamma_k}{k}$$

also (Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel)

$$|c_k| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k^2} + |\gamma_k|^2\right).$$

Weil die Reihen über beide Terme konvergieren, konvergiert auch die Reihe $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|$. Dies bedeutet, dass die Fourierreihe absolut und gleichmäßig konvergiert. Insbesondere ist die Grenzfunktion $\tilde{f}$ wieder stetig. Wegen der Konvergenz im quadratischen Mittel ist $\left\|f - \tilde{f}\right\|_2 = 0$. Da die Funktion stetig ist, folgt hieraus $f = \tilde{f}$. □

Kapitel 8

Sonstige Anwendungen

Konvexität

Definition 8.1. *Sei D ein Intervall, $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Sie heißt* konvex, *wenn für alle $x_1, x_2 \in D$ und alle $\lambda \in (0,1)$ gilt*

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$

Sie heißt konkav, *wenn die Ungleichung $\geq$ erfüllt ist.*

Konvex/konkav bedeutet, dass der Graph der Funktion unterhalb/oberhalb der Sekante läuft.

Satz 8.2. *Sei $D = (a,b)$ und $f : D \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Dann ist f genau dann konvex, wenn $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in D$.*

Beweis: Sei $f'' \geq 0$. Dann ist f' monoton wachsend. Seien $x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 < x_2$. Sei $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$. Dann gilt $x_1 < x < x_2$. Wir wenden den Mittelwertsatz der Differentialrechnung an auf die Intervalle $[x_1, x]$ und $[x, x_2]$. Es gibt also $\xi_1 \in (x_1, x)$ und $\xi_2 \in (x, x_2)$, so dass

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2) = \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

Wegen $x - x_1 = (1-\lambda)(x_2 - x_1)$ und $x_2 - x = \lambda(x_2 - x_1)$ folgt

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{1-\lambda} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{\lambda}$$

und daher

$$f(x) \leq (1-\lambda)f(x_2) + \lambda f(x_1)$$

Die Funktion ist konvex.

Sei nun umgekehrt die Funktion konvex. Angenommen, es gelte nicht $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in D$. Sei $x_0 \in D$ mit $f''(x_0) < 0$. Wir setzen $c = f'(x_0)$ und

$$\phi(x) = f(x) - f(x_0) - c(x - x_0)$$

Die Funktion ist zweimal differenzierbar mit $\phi'(x_0) = 0$ und $\phi''(x_0) = f''(x_0) < 0$. Also hat ϕ in x_0 ein isoliertes lokales Maximum. Es gibt also $h > 0$, so dass $x_0 \pm h \in D$ und

$$\phi(x \pm h) < \phi(x_0)$$

Es folgt

$$f(x_0) = \phi(x_0) > \frac{1}{2}(\phi(x+h) + \phi(x-h))$$

Dies verletzt die Konvexitätsbedingung für $\lambda = 1/2$ und $x_1 = x - h$, $x_2 = x + h$. □

Als Anwendung von Konvexitätsbetrachtungen erhalten wir die Dreiecksungleichung, die wir bereits mühsam zu Fuß bewiesen haben. Die folgenden Relationen werden sehr wichtig in der Funktionalanalysis und der Theorie der Differentialgleichungen.

Lemma 8.3. *Seien $p, q \in (1, \infty)$ mit $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Dann gilt für alle $x, y > 0$ die Ungleichung*

$$x^{1/p} y^{1/q} \leq \frac{x}{p} + \frac{y}{p}$$

Für $p = q = 2$ ist dies die bekannte Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel.

Beweis: Wir verwenden den Logarithmus $\log : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$. Seine 2. Ableitung ist $-1/x^2$, also die Funktion konkav. Es gilt mit $\lambda = p^{-1}$, $(1 - \lambda) = q^{-1}$

$$\log(p^{-1}x + q^{-1}y) \geq p^{-1}\log(x) + q^{-1}\log(y)$$

Anwenden der monotonen Funktion exp liefert die Behauptung. □

Sei $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ ein Vektor. Wir definieren seine *p-Norm* als

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p}$$

Den komplexen Absolutbetrag erhalten wir also als Spezialfall $z \in \mathbb{R}^2$.

Satz 8.4 (Höldersche Ungleichung)**.** *Seien $p, q \in (1, \infty)$ mit $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Seien $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ und $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n$. Dann gilt*

$$\sum_{k=1}^{n} |x_i y_i| \leq \|x\|_p \|y\|_q$$

Beweis: Ohne Einschränkung ist $\|x\|_p \neq 0$ und $\|y\|_q \neq 0$. Wir setzen $\xi_i = |x_i|^p / \|x\|_p$ und $\eta_i = |y_i|^q / \|y\|_q$. Dann ist

$$\sum \xi_i = \sum \eta_i = 1$$

Wir wenden den Hilfsatz an auf ξ_i und η_i und erhalten

$$\frac{|x_i y_i|}{\|x\|_p \|y\|_q} \leq \frac{\xi_i}{p} + \frac{\eta_i}{q}$$

Wir summieren über alle i und erhalten

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{|x_i y_i|}{\|x\|_p \|y\|_q} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Die ist die Behauptung. □

Korollar 8.5 (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)**.** *Für $x, y \in \mathbb{C}^n$ gilt*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|_2 \|y\|_2 .$$

Hierbei ist

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{x}_i y_i$$

das *Standardskalarprodukt auf* $\mathbb{C}^n$.

Beweis: Wir setzen $p = q = 2$ in der Hölderschen Ungleichung für $\overline{x}$ und y. □

Satz 8.6 (Minkowskische Ungleichung)**.** *Sei $p \in (1, \infty)$. Dann gilt für $x, y \in \mathbb{C}^n$*

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p .$$

Beweis: Für $p = 1$ folgt der Satz aus der Dreiecksungleichung für komplexe Zahlen, die wiederum aus $p = 2$ und dem reellen Fall folgt. Sei also nun $p > 1$. Wir definieren q durch $p^{-1} + q^{-1} = 1$, also $pq = p + q$. Sei $z \in \mathbb{C}^n$ mit $z_i = |x_i + y_i|^{p-1}$ für $i = 1, \ldots, n$. Dann ist $z_i^q = |x_i + y_i|^{(p-1)q} = |x_i + y_i|^p$. Es folgt

$$\|z\|_q = \|x + y\|_p^{p/q}$$

Nach Dreiecksungleichung und der Hölderschen Ungleichung gilt

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i||z_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i z_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i z_i| \leq \|x\|_p \|z\|_q + \|y\|_p \|z\|_q$$

Nach der Definition von z_i ist die linke Seite

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i||x_i + y_i|^{p-1} = \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p = \|x + y\|_p^p .$$

Nach unserer Berechung von $\|z\|_q$ gilt also insgesamt

$$\|x + y\|_p^p \leq (\|x\|_p + \|y\|_p) \|x + y\|_p^{p/q}$$

Wegen $p - p/q = 1$ folgt die Behauptung. □

Das Newton-Verfahren

Wie finden wir explizit die Nullstelle einer (hinreichend gutartigen) Funktion auf $\mathbb{R}$? Wir kennen bereits das Intervallhalbierungsverfahren für stetige Funktionen. Nun behandelnt wir eine sehr schnelle Alternative.

Wir beschreiben zunächst den Algorithmus. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall. Sei $x_0 \in D$ ein Startwert. Wir setzen

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Geometrisch: wir legen eine Tangente durch $(x_n, f(x_n))$ und bestimmen die Nullstelle der Tangente.

Angenommen, die Folge ist wohldefiniert (also stets $f'(x_n) \neq 0$, $x_{n+1} \in D$) und konvergent mit Grenzwert ξ, dann gilt:

$$\xi = \xi - \frac{f(\xi)}{f'(\xi)} \Rightarrow f(\xi) = 0.$$

Beispiel. $f(x) = x^2 - 2$, $f'(x) = 2x$, $x_0 = 2$. Dann ist

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 - \frac{4-2}{4} = \frac{3}{2} = 1,5 \\ x_2 &= \frac{3}{2} - \frac{\frac{9}{4} - \frac{8}{4}}{3} = \frac{17}{12} = 1,416666 \\ \sqrt{2} &= 1,4141... \end{aligned}$$

Satz 8.7. *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbare konvexe Funktion mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$. Dann gilt:*

(i) Es gibt genau ein $\xi \in [a,b]$ mit $f(\xi) = 0$.

(ii) Ist $x_0 \in [a,b]$ beliebig mit $f(x_0) \geq 0$, so ist die Folge des Newton-Verfahrens wohldefiniert und monoton fallend und konvergiert ξ.

(iii) Gilt $f'(\xi) \geq C > 0$ und $f''(x) \leq K$ für alle $x \in [\xi, b]$, so gilt für alle n die Abschätzung

$$|x_{n+1} - x_n| \leq |\xi - x_n| \leq \frac{K}{2C}|x_n - x_{n-1}|^2.$$

Beweis: Da f konvex ist, ist f' auf $[a,b]$ monoton wachsend und hat höchstens eine Nullstelle. Sei $q \in [a,b]$ der Punkt, in der f sein Minimum annimmt. Falls $q \neq a$, so hat f ein isoliertes Minimum mit $f'(q) = 0$. Minimum ebenfalls negativ. Auf $[a,q]$ ist $f' \leq 0$, also die Funktion f monoton fallend und damit negativ.

Nach dem Zwischenwertsatz hat f eine Nullstelle ξ auf $[q,b]$. Sie hat keine weitere Nullstellen, den zwischen diesen beiden gäbe es einen Punkt im Inneren von

$[q, b]$ mit verschwindender Ableitung. Dies beweist die erste Aussage. Auf $[q, b]$ ist $f' > 0$ und die Funktion f streng monoton steigend.

Der Punkt x_0 liegt nach Voraussetzung in $[q, b]$ mit $f(x_0) \geq 0$. Wir zeigen $\xi \leq x_1 \leq x_0$. (Danach wenden wir diese Behauptung auf $x_1, x_2, \ldots$ and und erhalten Wohldefiniertheit und Monotonie von $(x_n)_{n\geq 1}$.)

Es ist $f(x_0) \geq 0$ und $f'(x_0) > 0$, also also ist $f(x_0)/f'(x_0) > 0$ und daher $x_1 \leq x_0$. Wir zeigen nun $f(x_1) \geq 0$ (daraus folgt dann $x_1 \geq \xi$) wegen der Monotonie.) Dafür betrachten wir

$$\phi(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$$

mit

$$\phi'(x) = f'(x) - f'(x_0).$$

Diese Ableitung ist negativ auf $[q, x_0]$ wegen der Monotonie von f'. In x_0 gilt $\phi(x_0) = 0$. Also ist $\phi \geq 0$ auf $[q, x_0]$, also insbesondere in x_1:

$$0 \leq \phi(x_1) = f(x_1) - f(x_0) - f'(x_0)(x_1 - x_0) = f(x_1).$$

Als monoton fallende, beschränkte Folge konvergiert $(x_n)_{n\geq 1}$. Wir haben bereits oben gezeigt, dass der Grenzwert dann eine Nullstelle von f ist, also $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$.

Wir wenden uns der Fehlerabschätzung zu. Seien C, K wie im Satz. Wegen der Monotonie gilt $f'(x) \geq C$ für alle $x \geq \xi$. Die Funktion wächst also schneller als die lineare Funktion $C(x - \xi)$, d.h. auf $[\xi, b]$ gilt

$$f(x) \geq C(x - \xi) \Rightarrow |x - \xi| \leq \frac{f(x)}{C}.$$

Um $f(x)$ weiter abschätzen zu können, betrachten wir

$$\psi(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - \frac{K}{2}(x - x_0)^2.$$

Durch Ableiten erhalten wir

$$\begin{aligned} \psi'(x) &= f'(x) - f'(x_0) - K(x - x_0) \\ \psi''(x) &= f''(x) - K \leq 0. \end{aligned}$$

Also ist ψ' monoton fallend in $[\xi, b]$. In x_0 verschwindet sie, also ist $\psi' \geq 0$ auf $[\xi, x_0]$. Damit ist ψ monoton wachsen auf $[\xi, x_0]$. In x_0 verschwindet auch ψ, also ist $\psi(x) \leq 0$ auf $[\xi, x_0]$. Wir erhalten in x_1

$$f(x_1) \leq K(x - x_0)^2.$$

Zusammen also

$$|\xi - x_1| \leq \frac{K(x - 0)^2}{C}.$$

□

Parameterabhängige Integrale

Wir erinnern an die Γ-Funktion, die für jedes x als Wert eines Integrals über eine Funktion definiert wurde, die auch von x abhängt.
Wir betrachten jetzt

$$f : (x,t) \mapsto f(x,t)$$

für $t \in [a,b]$, $x \in D$ so dass für jedes x die Funktion $t \mapsto f(x,t)$ integrierbar ist. Dann definiert

$$x \mapsto F(x) = \int_a^b f(x,t)\mathrm{d}t$$

eine Funktion von x. Wann ist sie stetig? Wann ist sie integrierbar? Es handelt sich jedesmal um Fragen nach dem Vertauschen von Grenzwerten, wie wir sie bereits beim Summieren von Funktionenfolgen kennengelernt haben.

Beispiel. Sei $f(x,t) = t^x$. Dann ist für $x \neq 1$

$$F(x) = \int_a^b t^x \mathrm{d}t = \left.\frac{t^{x+1}}{x+1}\right|_a^b = \frac{1}{x+1}(b^{x+1} - a^{x+1})$$

Diese Funktion ist differenzierbar mit Ableitung

$$F'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}(b^{x+1} - a^{x+1}) + \frac{1}{x+1}(\log(b)b^{x+1} - \log(a)a^{x+1})$$

Andererseit ist

$$\frac{\mathrm{d}t^x}{\mathrm{d}x} = \log(t)t^x$$

Als Funktion von t raten wir die Stammfunktion

$$g(x,t) = -\frac{1}{(x+1)^2}t^{x+1} + \frac{1}{x+1}\log(t)t^{x+1}.$$

Es gilt daher

$$\int_a^b \log(t)t^x = F'(x).$$

Satz 8.8. *(i) Sei $f : D \times [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Für festes $t \in [a,b]$ sei die Funktion $f(\cdot,t)$ stetig und für festes $x \in D$ sei $f(x,\cdot)$ Riemann-integrierbar. Dann ist*

$$x \mapsto F(x) = \int_a^b f(x,t)\mathrm{d}t$$

stetig.

(ii) Sei zusätzlich $f(x,\cdot)$ differenzierbar und $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x,t)$ sei beschränkt und für jedes feste $x \in D$ integrierbar. Dann ist F differenzierbar, und es gilt

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\mathrm{d}f(x,t)}{\frac{\mathrm{d}}{t}}\mathrm{d}t,$$

d.h. es kann unter den Integralzeichen differenziert werden.

Zur Vorbereitung benötigen wir eine Variante unseres Satzes über die Konvergenz von Integralen über Funktionenfolgen.

Satz 8.9. *Sei $(g_n)_{n\geq 1}$ eine punkteweise konvergente Folge von Riemann-integrierbaren Funktionen auf einem abgeschlossenen Intervall D, deren Grenzfunktion g Riemann-integrierbar ist. Sei ausserdem $\{g_n(t)|n \geq 1, t \in D\}$ beschränkt. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b g_n(t)\mathrm{d}t = \int_a^b g(t)\mathrm{d}t.$$

Statt gleichmäßiger Konvergenz verlangen wir also eine Beschränktheitsvoraussetzung.

Beweis: Barner-Flohr §10, Satz von Arzela-Osgood, S. 392. □

Beweis: Sei $x \in D$ fest und $(x_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in D mit Grenzwert x. Wir müssen zeigen, dass

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = F(x).$$

Sei $g_n(t) = f(x_n, t)$. Nach Voraussetzung ist diese Funktion integrierbar. Für jedes t gilt $\lim_{n\to\infty} g_n(t) = f(x,t)$ wegen der Stetigkeit im ersten Argument. D.h. die Funktionenfolge konvergiert punktweise. Da f beschränkt ist, gibt es C, so dass $|g_n(t)| \leq C$ für alle n und t. Nach dem Satz von Arzela-Osgood folgt

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x_n, t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(x,t)\mathrm{d}t.$$

Dies beweist der ersten Teil der Behauptung.

Für den zweiten Teil sei wieder $(x_n)_{n\geq 1}$ Folge in D mit Grenzwert x. Wir berechnen den Differenzenquotienten

$$\frac{F(x_n) - F(x)}{x_n - x} = \int_a^b \frac{f(x_n,t) - f(x,t)}{x_n - x}\mathrm{d}t.$$

Sei $h_n(t)$ der Integrand. Für festes t konvergiert die Folge gegen $\frac{\mathrm{d}f(x,t)}{\mathrm{d}x}$ nach Definition der Ableitung, d.h. die Folge h_n ist punktweise konvergent. Die Grenzfunktion ist nach Voraussetzung Riemann-integrierbar. Nach Voraussetzung ist $\frac{\mathrm{d}f(x,t)}{\mathrm{d}x}$ beschränkt durch eine Konstante C'. Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung folgt

$$|h_n(t)| = \left|\frac{f(x_n,t) - f(x,t)}{x_n - x}\right| = \left|\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(\xi, t)\right| \leq C'$$

Wieder ist die Voraussetzung des Satzes von Arzela-Osgood erfüllt:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b h_n(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}((x,t)\mathrm{d}t$$

Nach Definition ist die linke Seite $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}(x)$. □

Ausblick

Der Inhalt dieser Vorlesung wird in mehrere Richtungen verallgemeinert werden:

(i) Differentialrechnung für Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$: Dies ist der Inhalt der Analysis II. Wir versuchen wieder, die Funktion möglichst gut linear zu approximieren. Wir müssen also auf ein paar Begriffe der lineare Algebra zurückgreifen.

(ii) Integralrechnung für Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$: Hier gibt es zwei Zugänge. Einerseits gibt es eine mehrdimensionale Version des Riemann-Integrals. Dies sind die Integrale, die in der Praxis auftauchen. Die Theorie wird in der Kurzvorlesung Mehrfachintegrale besprochen. Anderseits kann man stattdessen das Lebesgue-Integral behandeln. Dabei kann $\mathbb{R}^n$ durch andere Mengen X ersetzt werden, z.B. $X = \mathbb{N}$. Diese Theorie wird in Analysis III behandelt. Sie ist gleichzeitig die Sprache der modernen Wahrscheinlichkeitstheorie.

(iii) Differentialrechnung für Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Dies nennnt man Funktionentheorie. Einen Teil davon haben wir bereits beim Behandeln von Potenzreihen gesehen.

Inhaltsverzeichnis