Übungen zur Vorlesung "Analysis I"
WS 2014/15 Blatt 11

Ausgabe: 12.01.2015, **Abgabe:** 19.01.2015

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ws14/analysis.html

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 11.1: Bestimmen Sie für welche $x \in \mathbb{R}$ die folgenden Funktionen definiert und differenzierbar sind und berechnen Sie jeweils die Ableitungen:

1. $f_1(x) := x \cdot \log x - x$
2. $f_2(x) := \log\left(\frac{1}{x^2}\right)$
3. $f_3(x) := \log(1 + \sqrt{e^x})$
4. $f_4(x) := \frac{\sin(3x)+x}{\sqrt{x}}$
5. $f_5(x) := x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{4}}$.

(5 Punkte)

Aufgabe 11.2: Wir wissen bereits aus der Vorlesung, dass die Funktion

$$\sin : [0, \pi/2) \longrightarrow \mathbb{R}$$

streng monoton wachsend ist.

1. Zeigen Sie, dass das Bild genau $[0, 1)$ ist.
2. Zeigen Sie, dass die Umkehrfunktion $\arcsin : [0, 1) \longrightarrow [0, \pi/2)$ mit $x \longmapsto \sin^{-1}(x)$, die als *Arkussinus* bezeichnet wird, existiert.
3. Zeigen Sie, dass der Arkussinus differenzierbar ist und bestimmen Sie die Ableitung.

(4 Punkte)

Aufgabe 11.3: Wir definieren die *Tangensfunktion* durch

$$\begin{aligned} \tan : (-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ z &\longmapsto \frac{\sin z}{\cos z}. \end{aligned}$$

1. Zeigen Sie, dass diese Funktion wohldefiniert und auf dem Intervall $(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$ differenzierbar ist.

2. Zeigen Sie, dass die Gleichungen
$$\tan'(z) = \frac{1}{\cos(z)^2} = 1 + \tan(z)^2$$
gelten.

3. Folgern Sie, dass die Tangensfunktion streng monoton wachsend ist.

4. Zeigen Sie, dass der Tangens surjektiv ist und folgern Sie, dass es eine Umkehrfunktion gibt. Diese wird als Arkustangens $\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow (-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$, $x \longmapsto \tan^{-1}(x)$ bezeichnet.

5. Zeigen Sie, dass
$$(\log\cos)'(z) = -\tan(z).$$

(6 Punkte)

Aufgabe 11.4: Wir betrachten die Funktion

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} 2 - x & \text{falls } x > 1 \\ 2x - x^3 & \text{falls } -\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ 3 & \text{falls } x < -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

1. Fertigen Sie eine Skizze des Graphen von g an.

2. Bestimmen Sie diejenigen $x \in \mathbb{R}$, an denen die Funktion g differenzierbar ist.

3. Bestimmen Sie alle Punkte $x \in \mathbb{R}$, an denen die Funktion g ein lokales Extremum besitzt.

(6 Punkte)