Übungen zur Vorlesung "Analysis I"
WS 2014/15 Blatt 13

Ausgabe: 26.01.2015, **Abgabe:** 2.02.2015

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ws14/analysis.html

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 13.1: Wir wollen das Integral

$$\int_0^1 e^x \mathrm{d}x$$

direkt über die Definition 6.6 aus dem Skript bestimmen:

1. Konstruieren Sie dazu Treppenfunktionen ϕ_n^+, ϕ_n^- für die Unterteilung $0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \cdots < \frac{n-1}{n} < 1$, die die Voraussetzungen von Lemma 6.9 erfüllen.
2. Folgern Sie aus dem Lemma, dass die Funktion $e^x : [0,1] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar ist und berechnen Sie das Integral gemäß Definition 6.6.

(6 Punkte)

Aufgabe 13.2: Berechnen Sie die Integrale

$$A_1 := \int_1^3 x^4 \mathrm{d}x \qquad A_2 := \int_0^\pi \sin(x)\mathrm{d}x \qquad A_3 := \int_1^2 \frac{1}{x}\mathrm{d}x.$$

unter Verwendung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung, Theorem 6.14.

(4 Punkte)

Aufgabe 13.3: Sei eine Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ über eine Potenzreihe $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ gegeben, die unendlichen Konvergenzradius besitzt. Beweisen Sie,

1. dass diese Funktion auf jedem Intervall $[a,b]$ mit $a,b \in \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar ist,
2. und jede Stammfunktion wiederum durch eine Potenzreihe angegeben werden kann, ebenfalls mit unendlichem Konvergenzradius.

(4 Punkte)

Aufgabe 13.4: Wir betrachten die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 2x \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Geben Sie ein präzises und ausführliches Argument, dass f auf dem Intervall $[-\frac{1}{\pi}, +\frac{1}{\pi}]$ Riemann-integrierbar ist, indem Sie die Beweisidee von Satz 6.12 für f entsprechend anpassen. Berechnen Sie dann das Integral

$$\int_{-\frac{1}{\pi}}^{+\frac{1}{\pi}} f(x)\mathrm{d}x.$$

(Hinweis: Beachten Sie, dass die Funktion f nicht stetig ist. Satz 6.12 oder Theorem 6.14 lassen sich daher nicht direkt anwenden. Aus dem zweiten Beispiel im Skript nach Satz 5.7 wissen wir, dass

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

eine Stammfunktion für f ist.)

(6 Punkte)