Übungen zur Vorlesung "Analysis I"
WS 2014/15 Blatt 14

Ausgabe: 2.02.2015, **Abgabe:** 9.02.2015

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ws14/analysis.html

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 14.1: Berechnen Sie die Integrale:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\pi} t^2 \exp t \mathrm{d}t \qquad B = \int_1^{10} \log t \mathrm{d}t \qquad C = \int_1^2 \frac{\log t}{t} \mathrm{d}t \\ D &= \int_0^1 t e^{-2t} \mathrm{d}t \qquad E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\cos(t) \mathrm{d}t \qquad F = \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \mathrm{d}t \end{aligned}$$

Geben Sie eine knappe *informelle* Begründung, warum aus Integral (F) folgt, dass ein Kreis von Radius eins gerade die Fläche π besitzt.

(6 Punkte)

Aufgabe 14.2: Berechnen Sie das uneigentliche Integral

$$\int_0^{\infty} \frac{\log t}{1+t^2} \mathrm{d}t.$$

Hinweis: Trennen Sie das Integral auf als

$$\int_0^1 \frac{\log t}{1+t^2} \mathrm{d}t + \int_1^{\infty} \frac{\log t}{1+t^2} \mathrm{d}t$$

und substituieren Sie mit t^{-1}.

(4 Punkte)

Aufgabe 14.3: Zeigen Sie, dass

$$\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2} \mathrm{d}x = \frac{22}{7} - \pi.$$

Nutzen Sie die Abschätzung $1 \leq 1 + x^2 \leq 2$ für $x \in [0,1]$, um die linke Gleichungsseite genauer abzuschätzen. Dies erlaubt uns eine grobe Berechnung von π. Geben Sie an, mit wie vielen Nachkommastellen wir den Wert von π nun kennen. (Hinweis: Suchen Sie nach der Ableitung des Arkustangens, die wir von Blatt 12 kennen).

(6 Punkte)

Aufgabe 14.4: Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{4x^5+6}{(x^2+1)^3} \mathrm{d}x.$$

Für diese Aufgabe sollen Sie ausnahmsweise eine Formelsammlung verwenden. Geben Sie bitte genau diejenigen Formeln an, die Sie verwenden, und eine Quellenangabe.

(6 Punkte)

Bonus-Aufgabe 14.5: Bestimmen Sie die Taylorreihe des Tangens bis (einschließlich) zur Ordnung 5.

(6 Punkte)

Bonus-Aufgabe 14.6: Wir definieren

$$W_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)^n \mathrm{d}x.$$

1. Zeigen Sie, dass für alle $n \geq 2$ die Formel $nW_n = (n-1)W_{n-2}$ gilt.
2. Folgern Sie, dass

$$\begin{aligned} W_{2n} &= \left(\frac{2n-1}{2n}\frac{2n-3}{2n-2}\cdots\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2} \\ W_{2n-1} &= \left(\frac{2n-2}{2n-1}\frac{2n-4}{2n-3}\cdots\frac{2}{3}\right) \end{aligned}$$

   (in der Formel zu W_{2n} durchlaufen die Zähler die ungeraden Zahlen, die Nenner die geraden; bei W_{2n-1} ist es umgekehrt).
3. Zeigen Sie, dass für alle $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ die Ungleichung $\cos(x)^{n+1} \leq \cos(x)^n$ gilt und damit

$$W_{n+2} \leq W_{n+1} \leq W_n.$$

   Folgern Sie, dass $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \frac{W_{n+1}}{W_n} = 1$.
4. Folgern Sie, dass

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdots (2n)^2}{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdots (2n-1)^2} \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{2}.$$

(6 Punkte)