Übungen zur Vorlesung "Analysis I"
WS 2014/15 Blatt 1

Ausgabe: 27.10.2014, **Abgabe:** 3.11.2014

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ws14/analysis.html

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 1.1: Es seien A, B, C Aussagen. Geben Sie einen ausführlichen Beweis, dass die folgenden Gleichheiten gelten:

$$\begin{aligned} \neg(A \vee B) &= (\neg A) \wedge (\neg B) \\ (A \vee B) \wedge C &= (A \wedge C) \vee (B \wedge C) \\ \neg\neg A &= A. \end{aligned}$$

(ein Beispiel eines vergleichbaren Beweises wird in der Übung diskutiert)

(5 Punkte)

Aufgabe 1.2:

1. Zeigen Sie, dass $(a+b)^2 \geq 2ab$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt.
2. Zeigen Sie, dass $a + \frac{1}{a} \geq 2$ für alle $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ gilt.

(4 Punkte)

Aufgabe 1.3: Wir betrachten die folgende Teilmenge der reellen Zahlen:

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \left\{ x = a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q} \right\},$$

d.h. jedes Element $x \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ lässt sich in der Form $x = a + b\sqrt{2}$ mit $a, b \in \mathbb{Q}$ schreiben.

Zeigen Sie, dass die Menge $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ bezüglich der gleichen Verknüpfungen $+, \cdot$ wie in $\mathbb{R}$ die Körperaxiome K1-K9 und Anordnungsaxiome A1-A3 erfüllt.

(Beispiel: Für Axiom K8 muss man zeigen, dass für jedes $x \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ mit $x \neq 0$ ein $y \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ existiert, sodass $xy = 1$ gilt.)

(6 Punkte)

Aufgabe 1.4: Geben Sie eine möglichst einfache Beschreibung der Schnittmenge $A \cap B$ wobei

$$\begin{aligned} A &:= \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \\ B &:= \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 - y^2 = 0\}. \end{aligned}$$

Wir können geordnete Paare $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ als Punkte in der Ebene interpretieren, wobei x die x-Koordinate und y die y-Koordinate angibt. Zeigen Sie, dass mit dieser geometrischen Interpretation die Menge $A \cap B$ als Vereinigung von zwei Strecken beschrieben werden kann. Fertigen Sie eine Skizze an.

(4 Punkte)