Übungen zur Vorlesung “Analysis I”
WS 2014/15 Blatt 5

Ausgabe: 24.11.2014, **Abgabe:** 1.12.2014

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ws14/analysis.html

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 5.1: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge.

1. Zeigen Sie: Falls $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ein a konvergiert, so konvergiert auch jede Teilfolge gegen a.
2. Es seien $A_1, \dots, A_p$ (für $p \geq 1$) unendliche Teilmengen der natürlichen Zahlen und es gelte
   - $A_1 \cup \dots \cup A_p = \mathbb{N}$
   - Für $i = 1, \dots, p$ konvergiert die Folge $(a_n)_{n\in A_i}$ gegen b_i.

   Beweisen Sie, dass die Menge $\{b_1, \dots, b_p\}$ genau die Menge der Häufungspunkte der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 5.2: In der Vorlesung wurde bereits erwähnt, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$$

gilt. Beweisen Sie dies mittels vollständiger Induktion, indem Sie zeigen, dass die n-te Partialsumme gerade $\frac{n}{n+1}$ ist.

(3 Punkte)

Aufgabe 5.3: Prüfen Sie jeweils, ob die Reihe konvergiert und geben Sie eine ausführliche Begründung:

1. $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2^k}$$

2.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$$

3.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k+1)}$$

(6 Punkte)

Aufgabe 5.4: Sei x eine reelle Zahl. Wir betrachten eine Reihe der Form

$$\sum_{i=N}^{\infty} a_i 10^{-i} \qquad \text{mit } a_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}. \tag{1}$$

(für eine beliebige ganze Zahl N, evtl. negativ).

1. Zeigen Sie, dass jede Reihe der Form (1) konvergiert.

2. Eine *Dezimalbruchentwicklung* einer reellen Zahl x ist eine Reihe der Form (1), die gegen x konvergiert. Zeigen Sie, dass jede reelle Zahl x eine Dezimalbruchentwicklung besitzt.

3. Kann eine reelle Zahl x mehrere Dezimalbruchentwicklungen besitzen? Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel.

(6 Punkte)