Übungen zur Vorlesung "Analysis I"
WS 2014/15 Blatt 6

Ausgabe: 1.12.2014, **Abgabe:** 8.12.2014

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ws14/analysis.html

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 6.1:

1. Zeigen Sie, dass für $1 \leq l \leq N-1$ und $N \geq 2$ die Ungleichung
$$\frac{1}{\sqrt{l(N-l)}} \geq \frac{1}{N-1}$$
gilt.

2. Berechnen Sie das Cauchy-Produkt der Reihen
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \qquad \text{und} \qquad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\sqrt{m}}. \tag{1}$$
(Wir haben bereits auf dem letzten Übungsblatt gesehen, dass die Reihen in (1) konvergieren)

3. Zeigen Sie, dass das Cauchy-Produkt *nicht* konvergiert.

(6 Punkte)

Aufgabe 6.2: Wir definieren eine Funktion durch
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \left| [x + \frac{1}{2}] - x \right|, \end{aligned}$$
wobei $[\cdot] : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die in der Vorlesung definierte Gaußklammer bezeichnet, d.h. $[x]$ ist die größte ganze Zahl kleiner gleich x.

1. Skizzieren Sie den Graphen der Funktion.

2. Zeigen Sie, dass für $|x| \leq \frac{1}{2}$ die Gleichung $\left|[x+\frac{1}{2}] - x\right| = |x|$ gilt.

3. Geben Sie einen ausführlichen Beweis, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{Z}$ die Gleichung $f(x+n) = f(x)$ gilt.

4. Geben Sie einen ausführlichen Beweis, dass die Funktion f stetig ist.

(6 Punkte)

Aufgabe 6.3: Wir definieren eine Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} x^2 & \text{falls } x \geq 0 \\ 0 & \text{falls } x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass die Funktion f bei $x = 0$ stetig ist, indem

1. Sie konkret den links- und rechtsseitigen Grenzwert von f bei $x = 0$ berechnen;
2. Sie konkret prüfen, dass für alle Folgen $x_n \to 0$ die Gleichung $\lim\limits_{x_n \to 0} f(x_n) = 0$ gilt;
3. Sie konkret zeigen, dass die ε-δ-Definition erfüllt ist, d.h. für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ sodass aus $|x - 0| < \delta$ die Ungleichung $|f(x) - f(0)| < \varepsilon$ folgt.

(Wir wissen bereits aus der Vorlesung, dass diese Kriterien äquivalent sind, doch prüfen Sie bitte die Stetigkeit in allen diesen Varianten separat nach.)

(6 Punkte)

Aufgabe 6.4: Seien $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Beweisen Sie, dass dann die Funktion

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \max\{f(x), g(x)\} \end{aligned}$$

auch stetig ist.

(4 Punkte)

Bonus-Aufgabe 6.5: Wir definieren die Funktion

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } x \text{ irrational oder null} \\ \frac{1}{q} & \text{falls } x = \pm\frac{p}{q} \text{ mit } p, q \in \mathbb{N} \text{ und teilerfremd.} \end{cases} \end{aligned}$$

Beweisen Sie ausführlich die Aussage: Für jede irrationale Zahl $a \in \mathbb{R}$ ist die Funktion g bei a stetig.

(6 Punkte)