Übungen zur Vorlesung "Analysis I"
WS 2014/15 Blatt 7

Ausgabe: 8.12.2014, **Abgabe:** 15.12.2014

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ws14/analysis.html

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 7.1: Die Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 - 2$ ist stetig und es gilt $h(1) < 0$ und $h(2) > 0$. Nach dem Zwischenwertsatz existiert also eine Nullstelle im Intervall $[1, 2]$, bei der es sich offenbar um $\sqrt{2}$ handelt. Im Beweis des Zwischenwertsatzes haben wir einen konstruktiven Algorithmus kennengelernt, der aus der groben Abschätzung

$$1 \leq \sqrt{2} \leq 2$$

eine präzisere macht. Führen Sie die ersten fünf Schritte dieses Algorithmus von Hand durch.

(4 Punkte)

Aufgabe 7.2: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Beweisen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

1. Die Funktion f ist stetig.
2. Für jedes offene Intervall (a, b) kann die Menge
$$f^{-1}\left((a, b) \right) := \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in (a, b)\}$$
als Vereinigung von offenen Intervallen geschrieben werden, d.h.
$$f^{-1}\left((a, b) \right) = \bigcup_{i \in I} (x_i, y_i)$$
für I eine Menge und für alle $i \in I$ sind $x_i < y_i$ reelle Zahlen.

(4 Punkte)

Aufgabe 7.3: Auf dem letzten Übungsblatt haben wir bereits die Funktion

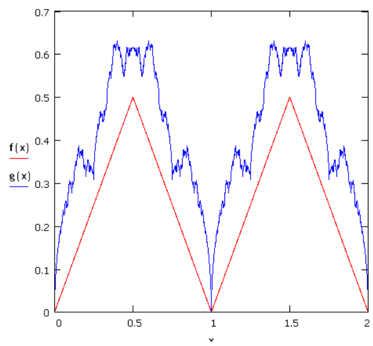
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \left| [x + \frac{1}{2}] - x \right| \end{aligned}$$

kennengelernt. Wir definieren nun eine neue Funktion $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ durch

$$g(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n^2 x)}{n^2}.$$

1. Zeigen Sie, dass diese Reihe für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert.
2. Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ die Gleichung $g(x+1) = g(x)$ gilt.
3. Zeigen Sie, dass für alle reellen Zahlen x, y die Ungleichung
$$|f(x) - f(y)| \leq \min\{|x-y|, \frac{1}{2}\}$$
gilt.
4. Zeigen Sie mit dem ε-δ-Kriterium, dass die Funktion g stetig ist.

Die folgende Graphik skizziert die Funktionen f und g, wobei g bis zum viertausendsten Summanden ausgewertet wurde:



Darstellung der Funktionen f und g

(7 Punkte)

Aufgabe 7.4: Sei $f : [0,1] \to [0,1]$ eine stetige Funktion. Beweisen Sie, dass es eine reelle Zahl $x \in [0,1]$ gibt, sodass $f(x) = x$ gilt.

(5 Punkte)