Übungen zur Vorlesung "Analysis I"
WS 2014/15 Blatt 8

Ausgabe: 15.12.2014, **Abgabe:** 22.12.2014

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ws14/analysis.html

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 8.1: Bestimmen Sie die Konvergenzradii der Potenzreihen

$$(1)\ f_1(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2z)^k}{3^k} \qquad (2)\ f_2(z) := \sum_{k=0}^{\infty} 2^{\sqrt{k}} z^k$$

$$(3)\ f_3(z) := \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k^2} z^k.$$

(3 Punkte)

Aufgabe 8.2: Wir definieren den *Sinus hyperbolicus*

$$\sinh(z) := \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

1. Zeigen Sie, dass die Funktion die Potenzreihendarstellung

$$\sinh(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

besitzt und diese unendlichen Konvergenzradius hat.

2. Zeigen Sie die Formel

$$\sinh(z) = -i \sin(iz), \qquad \text{(für alle } z \in \mathbb{C}\text{)}$$

die den Sinus mit dem Sinus hyperbolicus in Verbindung bringt.

3. Wir definieren den Cosinus hyperbolicus als $\cosh(z) := \cos(iz)$. Beweisen Sie die Formel

$$\cosh(z)^2 - \sinh(z)^2 = 1.$$

(6 Punkte)

Aufgabe 8.3:

1. Beweisen Sie, dass die auf allen reellen Zahlen x definierte Funktion

$$x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{für } x \neq 0 \\ 1 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

   stetig ist.

2. Folgern Sie aus der Stetigkeit, dass

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1.$$

   und dass die Funktion $[0, +\infty) \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\log(1+x)}{x} & \text{für } x > 0 \\ 1 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

   stetig ist.

(6 Punkte)

Aufgabe 8.4: Zeigen Sie, dass für alle $y \in \mathbb{R}$ die Gleichung

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n = e^y$$

gilt (Tipp: Übersetzen Sie die Behauptung in die Aussage, dass eine Funktion bei 0 stetig ist und wenden Sie das Folgenkriterium für die konkrete Folge $z_n := \frac{y}{n}$ an).

(4 Punkte)