Bonus-Aufgaben zur Vorlesung “Analysis I”
WS 2014/15

Ausgabe: 20.12.2014, **Abgabe:** 7.01.2015

Der Weihnachts-Zettel ist ein freiwilliges Aufgabenblatt. Die Aufgaben sind dazu gedacht, den gesamten bisher in der Vorlesung behandelten Stoff zu wiederholen. Die Aufgaben variieren deshalb über eine ganze Bandbreite von Themen. Unabhängig davon wie viele Aufgaben Sie bearbeiten, zählt dieser Zettel höchstens 24 Punkte und die Tutoren korrigieren Ihre Lösungen auch nur bis 24 Punkte erreicht sind

Bonus-Aufgabe 10.1: Beantworten Sie die folgenden Fragen mit Ja oder Nein und geben Sie nur eine knappe Begründung (ein oder zwei Sätze; kein vollständiges Argument!).

- Ist jede beschränkte Folge konvergent?
- Ist jede beschränkte Teilfolge einer konvergenten Folge konvergent?
- Ist jede Teilfolge einer konvergenten Folge beschränkt?
- Ist jede monoton fallende Teilfolge einer beschränkten Folge konvergent?
- Ist jede Folge mit mindestens einem Häufungspunkt konvergent?
- Ist jede Folge mit mindestens zwei verschiedenen Häufungspunkten divergent?
- Ist der Limes superior einer nichtkonstanten beschränkten Folge stets größer als der Limes inferior?
- Ist jede Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit monoton wachsenden $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent?
- Stimmt es, dass für jede konvergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ ebenfalls konvergiert?
- Die Summe der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ für $0 < |q| < 1$ ist $q + 1$?
- Wenn $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergente Reihen sind, folgt dann, dass $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ auch divergiert?
- Ist jede stetige Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ beschränkt?
- Ist jede stetige Funktion $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ beschränkt?
- Ist jede Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $\frac{a_n}{a_{n-1}} < 1$ konvergent?

- Sei $f : \mathbb{R} \setminus 0 \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die die Werte -1 und 1 unendlich oft annimmt. Besitzt die Funktion dann notwendigerweise eine Nullstelle?
- Ist die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ für alle $|z| \leq r$ (wobei r den Konvergenzradius bezeichnet) konvergent?
- Ist die Ableitung jeder differenzierbaren Funktion stetig?
- Ist jede beschränkte stetige Funktion differenzierbar?

(9 Punkte)

Bonus-Aufgabe 10.2: Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass

1. für jede natürliche Zahl n die Zahl $n^3 - n$ durch 3 teilbar ist.
2. für jede natürliche Zahl n die Gleichung

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

gilt.

(4 Punkte)

Bonus-Aufgabe 10.3:

1. Bestimmen Sie den Realteil der komplexen Zahl $\frac{1}{2-i}$.
2. Geben Sie ein Beispiel für eine komplexe Zahl $a + bi$ an, deren Realteil positiv ist, aber deren Quadrat einen negativen Realteil besitzt, oder existiert eine solche Zahl nicht?

(2 Punkte)

Bonus-Aufgabe 10.4: Bestimmen Sie alle Häufungspunkte der angegebenen Folgen:

1. $c_n := (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \sqrt[n]{2} + i^n$.
2. $d_n := \sum_{k=0}^{n} (-1)^k$
3. $e_n := (-1)^n (n + (-1)^n)$.

(6 Punkte)

Bonus-Aufgabe 10.5: Bestimmen Sie

$$\limsup_{n \longrightarrow \infty} \exp\left(\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right).$$

(4 Punkte)

Bonus-Aufgabe 10.6: Zeigen Sie, dass die Folge

$$b_n := \sqrt[n]{n!}$$

nicht konvergiert.
(Tipp: Würde die Folge konvergieren, so auch $\log \sqrt[n]{n!} = \frac{1}{n}\log(n!)$. Schätzen Sie nun $\log(n!)$ von unten ab. Wählen Sie z.B. ein W und betrachten Sie nur Folgenglieder $n > e^W$.)

(6 Punkte)

Bonus-Aufgabe 10.7: Wir wollen zeigen, dass

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \tag{1}$$

gilt.

1. Zeigen Sie, dass $\sqrt[n]{n} \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
2. Beweisen Sie die Ungleichung
$$(\sqrt[n]{n} - 1 + 1)^n \geq \binom{n}{2}(\sqrt[n]{n} - 1)^2.$$
3. Zeigen Sie, dass
$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n} - 1\right) = 0$$
gilt und folgern Sie die Behauptung aus Gleichung (1).
4. Zeigen Sie, dass für alle natürlichen Zahlen n die Potenzreihe
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^n}$$
den Konvergenzradius 1 besitzt.

(6 Punkte)

Bonus-Aufgabe 10.8: Beweisen Sie mittels der ε-δ-Definition direkt (d.h. ohne die Verwendung von Sätzen über Stetigkeit aus der Vorlesung oder alternativen Definitionen) die Stetigkeit der Funktion

$$\begin{aligned} f : (-1, +\infty) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sqrt{1+x}. \end{aligned}$$

(Tipp: die dritte binomische Formel ist hier nützlich.)

(5 Punkte)

Bonus-Aufgabe 10.9: Es seien $n, m \in \mathbb{N}$ beliebige natürliche Zahlen. Wir definieren eine Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} x^n & \text{falls } x \geq 0 \\ x^m & \text{falls } x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass die Funktion f bei $x = 0$ stetig ist, indem

1. Sie konkret zeigen, dass die Definition von Stetigkeit über Folgen erfüllt ist, d.h.
$$\lim_{x_n \to 0} f(x_n) = f(0).$$
2. Sie konkret zeigen, dass die ε-δ-Definition erfüllt ist, d.h. für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ sodass aus $|x - 0| < \delta$ die Ungleichung $|f(x) - f(0)| < \varepsilon$ folgt.

(3 Punkte)

Bonus-Aufgabe 10.10: Beweisen Sie, dass

1. die Grenzwertbeziehung
$$\lim_{x \to 0} (x \cdot \log x) = 0$$
gilt.
2. Folgern Sie, dass die Funktion
$$\begin{aligned} f : [0, +\infty) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} x^x & \text{für } x > 0 \\ 1 & \text{für } x = 0. \end{cases} \end{aligned}$$
stetig ist.

(6 Punkte)

Bonus-Aufgabe 10.11: Bestimmen Sie alle Lösungen z der Gleichung

$$\cosh z + 2e^{-z} = 4$$

(die Lösungen sind alle reell, es macht also keinen Unterschied diese Aufgabe in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ zu lösen.)

(4 Punkte)

Bonus-Aufgabe 10.12:

1. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$
\begin{aligned}
g : \mathbb{R} \setminus \{\frac{7}{4}\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\
x &\longmapsto \begin{cases} \frac{2x^2-x-3}{4x^2-3x-7} & \text{für } x \neq -1 \\ \frac{5}{11} & \text{für } x = -1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

auf ihrem gesamten Definitionsbereich stetig ist.

2. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$
\begin{aligned}
h : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\
x &\longmapsto \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

stetig ist.

3. Sei $a \in \mathbb{R}$ eine beliebige Zahl. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$
x \longmapsto \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ a & \text{für } x = 0 \end{cases}
$$

nicht stetig ist (ganz egal welcher Wert für a genommen wird).

(6 Punkte)

Bonus-Aufgabe 10.13: Beweisen Sie die Formel

$$\cos(4z) = 8\cos(z)^4 - 8\cos(z)^2 + 1$$

für alle komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$. Folgern Sie aus $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ (siehe unsere Definition von π aus der Vorlesung), dass

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}.$$

(Tipp: Lösen Sie eine geeignete quadratische Gleichung und nutzen Sie die Monotonie-Eigenschaften des Kosinus, um die richtige Lösung der quadratischen Gleichung auszuwählen.)

(6 Punkte)

Bonus-Aufgabe 10.14: Wir betrachten die Funktionen

1.

$$
\begin{aligned}
f : [0, +\infty) &\longrightarrow \mathbb{R} \\
x &\longmapsto \sqrt{x}
\end{aligned}
$$

2.

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} \setminus \{-1\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{2}{x+1} \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto |(x+1)(x-1)| \end{aligned}$$

Bestimmen Sie diejenigen x im Definitionsbereich der Funktionen, an denen die Funktion differenzierbar ist und berechnen Sie (für diese x) die Ableitung.

(6 Punkte)

Bonus-Aufgabe 10.15: Unter einem *trigonometrischen Polynom* versteht man einen Ausdruck der Form

$$f(z) := \sum_{i,j=0}^{n} a_{i,j} \sin(z)^i \cos(z)^j$$

(für beliebige $a_{i,j} \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$). Beweisen Sie, dass

1. die Summe und das Produkt trigonometrischer Polynome wieder ein trigonometrischen Polynom ist;
2. die Ableitung eines trigonometrischen Polynoms wieder ein trigonometrisches Polynom ist;
3. wenn f ein trigonometrisches Polynom ist, so ist auch $g(z) := f(z + \alpha)$ (für $\alpha \in \mathbb{C}$ beliebig) ein trigonometrisches Polynom.

(6 Punkte)

Frohe Weihnachten und ein gutes neues Jahr!