Funktionentheorie II
(Riemannsche Flächen)
Wintersemester 2016/17

Prof. Dr. Annette Huber-Klawitter

Fassung vom 6. Februar 2017

Dies ist ein Vorlesungsskript und kein Lehrbuch.
Mit Fehlern muss gerechnet werden!

Math. Institut
Eckerstr. 1
79104 Freiburg

0761-888 5495
annette.huber@math.uni-freiburg.de

Einleitung

Aus der Funktionentheorie kennen wir das Problem von Funktionen wie $\sqrt{\cdot}$ und log, die sich nicht global auf $\mathbb{C}$ definieren lassen, genauer: Es gibt mehrere mögliche Wahlen, die "Zweige", die nicht global zusammenpassen. Man spricht dann auch von "mehrwertigen Funktionen", aber was soll das sein? Anscheinend war es Riemann (1826–1866), der einen Ausweg fand: Der richtige Definitionsbereich für $\sqrt{\cdot}$ ist nicht eine Teilmenge von $\mathbb{C}$, sondern ein geometrisches Objekt X, das über $\mathbb{C}$ liegt, d.h. es gibt eine Abbildung $\pi : X \to \mathbb{C}*$. Ist $\Delta \subset \mathbb{C}^*$ eine offene Kreisscheibe, dann besteht $\pi^{-1}\Delta$ aus zwei Kopien von Δ. Auf X ist $\sqrt{\cdot}$ eine globale Funktion. Auf einem Exemplar von Δ der eine Zweig, auf dem anderen der andere. In diesem Beispiel ist es sogar leicht, X anzugeben. Wir wählen $X = \mathbb{C}^*$ und $\pi(z) = z^2$. Die Funktion $\sqrt{\cdot}$ auf X ist dann die Identität. Das sieht nach einem Taschenspielertrick aus, ist es aber nicht. Für kompliziertere Funktionen erhalten wir auch kompliziertere Flächen X, eben die Riemannschen Flächen.

Unser moderner Zugang geht anscheinend auf Hermann Weyl (1885–1955) zurück, "Die Idee der Riemannschen Fläche" zurück. Eine Riemannsche Fläche ist einfach eine eindimensionale komplexe Mannigfaltigkeit, als ein topologischer Raum, der lokal aussieht wie eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$. Alle Sätze der Funktionentheorie lassen sich in dieses Setting übertragen, mal einfach, mal kompliziert. Sie lösen gleichzeitig Riemanns Problem, sein X ist eben eine Riemannsche Fläche, die eine Teilmenge von $\mathbb{C}$ überlagert. Eine mehrwertige Funktion ist eine gewöhnliche Funktion auf X.

Eine der wichtigsten Frage (*di*e wichtigste), die dann zu klären ist, betrifft die Existenz von holomorphen oder meromorphen Funktionen.

Hier gibt es zwei große Sätze: der *große Riemannsche Abbildungssatz* besagt, dass es nur drei einfach zusammenhängende Riemannsche Flächen gibt: $\mathbb{C}$, $B_1(0)$ (aus FT bekannt), sowie $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Dies bedeutet, dass es auf jeder Riemannschen Fläche mehrwertige holomorphe Funktionen gibt. Jede Riemannsche Fläche ist von der Form, mit der Riemann arbeitete.

Der *Satz von Riemmann-Roch* beschreibt sehr genau, wieviele *meromorphe* Funktionen es auf einer kompakten Riemannschen Fläche gibt. Eine Konsequenz ist, dass sich jede kompakte Riemannsche Fläche in den projektiven Raum einbetten lässt - und dann automatische eine algebraische Varietät ist, also die Nullstellenmenge einer endlichen Menge von Polynomen.

Die beiden Sätze haben in den Beweismethoden ein sehr unterschiedliches Flavour. Hauptziel dieser Vorlesung ist der Beweis des Satzes von Riemann-Roch.

Vorlesungsplan

- Grundbegriffe, grundlegende Eigenschaften und Sätze aus der Funktionentheorie übertragen
- Garben und Garbenkohomologie, Satz von Riemann-Roch
- Die Sätze von Abel und Jacobi
- Elliptische Kurve
- falls Zeit ist: Grundbegriffe aus der Theorie der Modulkurven und Modulformen

Literatur

Hauptquelle ist:

- **O. Forster:** Riemannsche Flächen, Springer Verlag 1977.

Es gibt mehre Auflagen und auch eine englische Übersetzung.
Alternativen:

- **R. C. Gunning:** Lectures on Riemann surfaces. Princeton Mathematical Notes Princeton University Press, Princeton, N.J. 1966
- **A. F. Beardon:** A primer on Riemann surfaces. London Mathematical Society Lecture Note Series, 78. Cambridge University Press, Cambridge, 1984.
- *J. Jost, Jürgen* Compact Riemann surfaces. An introduction to contemporary mathematics. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 1997.
- **Hermann Weyl:** Die Idee der Riemannschen Fläche. Reprint of the 1913 German original. With essays by Reinhold Remmert, Michael Schneider, Stefan Hildebrandt, Klaus Hulek and Samuel Patterson. Edited and with a preface and a biography of Weyl by Remmert. Teubner 1997

Es gibt natürlich viele andere Quellen, oft mit sehr unterschiedlichen Standpunkten, die zu vergleichen sehr interessant sein kann.

Kapitel 1

Grundbegriffe

Definition 1.1. *Sei X ein topologischer Raum.*

(i) Ein komplexe Karte *ist ein Homöomorphismus*

$$\phi : U \to V$$

wobei $U \subset X$ offen und $V \subset \mathbb{C}$ offen. Die Abbildung ϕ heißt auch komplexe Koordinate *auf U.*

(ii) Zwei komplexe Karten $\phi_i : U_i \to V_i$ für $i = 1, 2$ heißen biholomorph verträglich*, falls die Abbildung*

$$\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(U_1 \cap U_2) \to \phi_2(U_1 \cap U_2)$$

biholomorph ist.

(iii) Ein komplexer Atlas *aus X ist ein System $\{\phi_i : U_i \to V_i\}_{i \in I}$ paarweise verträglicher Karten, die X überdecken, also $X = \bigcup_{i \in I} U_i$.*

(iv) Zwei Atlanten heißten verträglich*, wenn ihre Vereinigung ebenfalls ein Atlas ist.*

(v) Eine Riemannsche Fläche *ist ein zusammenhängender Hausdorffraum zusammen mit einer Äquivalenzklasse von Atlanten.*

Beispiel. (i) Sei $X \subset \mathbb{C}$ offen. Dann ist die Identität eine Karte. Sie definiert auch gleich einen Atlas, also eine Riemannsche Fläche.

(ii) Sei $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Wir wählen als Karten $U_0 = \mathbb{C}$ mit der Identität als Koordinate und $U_\infty = \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ mit $z \mapsto z^{-1}$ als Koordinate. Wir erhalten eine Riemannsche Fläche (hier ist jetzt einiges zu prüfen). Sie heißt *Riemannsche Zahlenkugel*.

Wir klären die vorkommende Begriffe:

Ein *Homöomorphismus* ist eine bijektive stetige Abbildung mit stetiger Umkehrfunktion. Eine Abbildung ist *stetig*, wenn die Urbilder offener Menge offen sind.

Eine *biholomorphe* Abbildung ist eine bijektive holomorphe Abbildung. Wir haben in FT I gesehen, dass dann die Umkehrabbildung ebenfalls holomorph ist. Im Fall von Karbenübergangsabbildungen ist die Abbildung bereits bijektiv, da Homöorphismus.

Ein topologischer Raum heißt *hausdorff*, wenn es zu je zwei Punkten P_1, P_2 disjunkte offene Umgebungen U_1 und U_2 gibt, d.h. U_i offen, $P_i \in U_i$, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Die Eigenschaft heißt manchmal auch T2 (es gibt auch T0,T1,T3 und T4).

Beispiel. Jeder metrische Raum ist hausdorff: Sei $r = d(P_1, P_2)$. Dann sind $B_{r/2}(P_i)$ diskunkte Umgebungen.

Einen Gegenbeispiel erhält man durch $X = \mathbb{C} \times \{0\} \cup \mathbb{C} \times \{1\}/ \sim$ mit der Äquivalenzrelation $(x, 0) \sim (x, 1)$ für $x \neq 0$. Eine Menge in X ist offen, wenn ihr Urbild in $\mathbb{C} \times \{0\} \cup \mathbb{C} \times \{1\}$ offen ist. In diesem topologischen Raum lassen sich die Punkte $(0, 0)$ und $(0, 1)$ nicht trennen. Das Beispiel zeigt deutlich, dass hausdorff eine *nicht-lokale* Eigenschaft ist. Jeder Punkt von X hat eine Umgebung, die hausdorff ist. Die Eigenschaft folgt daher auch nicht aus der Existenz von Karten!

Ein topologischer Raum heißt *zusammenhängend*, wenn er nicht als disjunkte Vereinigung von zwei echten offenen Teilmengen geschrieben werden kann. Ist ein topologischer Raum lokal zusammenhängend (für jeden Punkte P enthält jede Umgebung von P eine zusammenhängende Umgebung von P), so ist er Vereinigung von Zusammenhangskomponenten, also offenen zusammenhängenden Teilmengen. Daher ist die Zusammenhangsvoraussetzung harmlos.

Oft verlangt man beim Umgang mit Mannigfaltigkeiten auch noch das *2. Abzählbarkeitsaxiom*: Die Topologie hat eine abzählbare Basis, d.h. es gibt eine abzählbare Menge von offenen Mengen, so dass jede offene Menge als Vereingung von solchen geschrieben werden kann.

Beispiel. Die Bälle $B_r(x) \subset \mathbb{R}^n$ mit $r > 0$ rational und $x \in \mathbb{Q}^n$ bilden eine abzählbare Basis für die Topologie des $\mathbb{R}^n$.

Wir stellen diese Bedingung hier nicht. Wir behandeln zusammenhängende Riemannsche Flächen, die die Eigenschaft automatisch haben (großer Riemannscher Abbildungssatz, also tief!).

Und weil wir gerade dabei sind:

Ein topologischer Raum heißt *kompakt*, wenn jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung hat, d.h. falls $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ mit $U_i \subset X$ alle offen, dann gibt es endlich viele Indizes $i_1, \ldots, i_n \in I$ so dass $X = \bigcup_{j=1}^{n} U_{i_j}$.

Bemerkung. Dieser Begriff heißt manchmal auch nur *quasi-kompakt*. Ein topologischer Raum ist dann kompakt, wenn er quasi-kompakt und hausdorff ist.

Alle unsere topologischen Räume werden hausdorff sein, daher kommt es auf diesen Unterschied nicht an.

Beispiel. $\hat{\mathbb{C}}$ ist eine kompakte Riemannsche Fläche.

Beweis: Wir holen die Topologie nach: Eine Teilmenge $U \subset \hat{\mathbb{C}}$ ist offen, wenn sie eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist oder ihr Komplement eine abgeschlossene beschränkte Teilmenge von $\mathbb{C}$. Im ersten Fall gilt also $\infty \notin U$, im zweiten $\infty \in U$. Sei nun $\{U_i\}_{i\in I}$ eine offene Überdeckung. Dann gibt es i_0 mit $\infty \in U_{i_0}$. Das Komplement $A = \hat{\mathbb{C}} \smallsetminus U_{i_0}$ ist kompakt. Also wird es von endlich vielen der U_i überdeckt. Insgesamt haben wir so eine endliche Teilüberdeckung gefunden. Zu zeigen bleibt noch, dass $\hat{\mathbb{C}}$ hausdorff ist. Seien $z, w \in \hat{\mathbb{C}}$ verschieden. Sind beide ungleich ∞, so liegen sie beide in $\mathbb{C}$ und können dort durch offene Mengen getrennt werden. Ist einer der Punkte ∞, so liegt der andere in $\mathbb{C}$. Sei B eine offene Kreisscheibe, die diesen Punkt enthält. Sei D eine größere abgeschlossene Kreisscheibe, die B enthält. Sei $U = \hat{\mathbb{C}} \smallsetminus D$. Dann werden die Punkte durch B und U getrennt. □

Beispiel. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gitter. Dann ist $\mathbb{C}/\Omega$ mit der Quotiententopologie und den offensichtlichen Kartenabbildungen eine kompakte Riemannsche Fläche.

Beweis: Sei $V \subset \mathbb{C}$ offen, so dass keine zwei Punkte aus V äquivalent sind modulo Ω, z.B. $V = B_\varepsilon(z)$ mit $0 < \varepsilon < |\omega|/2$ für $\omega \in \Omega \smallsetminus \{0\}$. Wir betrachten $U = \pi(V)$. Wir wollen überprüfen, dass U offen ist, also $\pi^{-1}U \subset \mathbb{C}$ offen. Es gilt $\pi^{-1}U = \bigcup_{\omega\in\Omega} V + \omega$. Jeder der $V + \omega$ ist offen, also auch die Vereinigung. Die Einschränkung $\pi : V \to U$ ist bijektiv. Sie ist stetig nach Definition der Quotiententopologie. Sie ist offen, da das Bild einer offenen Teilmenge $V' \subset V$ wieder offen ist (genau wie das Bild von V selbst). Daher $\phi = \pi^{-1} : U \to V$ eine Kartenabbildung. Die Menge all dieser Karten ist ein Atlas. Dies ist die gesuchte "offensichtliche" Struktur als Riemannsche Fläche.

Zu zeigen ist noch, dass der topologische Raum hausdorff und kompakt ist. Kompaktheit ist einfach: Sei (ω_1, ω_2) eine $\mathbb{Z}$-Basis von Ω. Die Teilmenge

$$P = \{a\omega_1 + b\omega_2 | 0 \leq a, b \leq 1\}$$

ist beschränkt und abgeschlossen in $\mathbb{C}$, also kompakt. Das Bild unter π ist ganz $\mathbb{C}/\Omega$, daher ist dieser Raum ebenfalls kompakt. Seien $\overline{z}_1, \overline{z}_2$ verschiedene Elemente on $\mathbb{C}/\Omega$. Seien z_1, z_2 jeweils Urbilder in C. Sei

$$d = \min_{\omega\in\Omega} |z - w - \omega|.$$

Dieses Minimum ist positiv, da die Menge diskret ist und 0 nicht trifft. Sei $d/2\varepsilon > 0$, so dass π auf Kreisscheiben vom Radium ε bijekt ist. Dann finden wir mit $U_i = \pi(B_\varepsilon(z_i))$ die gesuchten Umgebungen. □

Definition 1.2. *Sei X eine Riemannsche Fläche und $Y \subset X$. Eine Abbildung $f : Y \to \mathbb{C}$ heißt* holomorph*, wenn für jede Karte $\phi : U \to V$ auf X die Funktion*

$$f \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap Y) \to \mathbb{C}$$

holomorph ist. Wir schreiben $\mathcal{O}(Y)$ für den Ring der holomorphen Funktionen auf Y.

Es genügt, die Bedingung auf einem Atlas zu überprüfen.

Beispiel. Sei $\phi : U \to V$ eine Kartenabbildung. Dann ist ϕ eine holomorphe Funktion.

Definition 1.3. *Sei X eine Riemannsche Fläche. Eine abgeschlossene Teilmenge $S \subset X$ besteht aus* isolierten Punkten, *wenn es für jedes $s \in S$ eine Umgebung gibt, die keinen weiteren Punkt aus S enthält. Ein* holomorphe Abbildung mit isolierten Singularitäten *ist eine holomorphe Abbildung auf $X \setminus S$. Sie hat in $s \in S$ eine* hebbare Singularität *bzw. einen* Pol *bzw. eine* wesentliche Singularität, *wenn für jede Karte $\phi : U \to V$, die s enthält, die Funktion $f \circ \phi^{-1}$ in $\phi(s)$ eine hebbare Singularität bzw. einen Pol bzw. eine wesentliche Singularität hat.*

Sie ist meromorph, *wenn alle Singularitäten höchstens Pole sind. Der Ring der meromorphen Funktion auf X wird mit $\mathcal{M}(X)$ bezeichnet.*

Satz 1.4. *Sei X eine Riemannsche Fläche $S \subset X$ eine Menge von isolierten Punkten und $f : X \setminus S \to \mathbb{C}$ holomorph.*

(i) $s \in S$ ist genau dann eine hebbare Singularität, wenn es eine Umgebung von s gibt, auf der f beschränkt ist. In diesem Fall existiert $\lim_{z\to s} f(z)$ und f lässt sich zu einer holomorphen Abbildung auf $X \setminus (S \setminus \{s\})$ fortsetzen.

(ii) $s \in S$ ist genau dann ein Pol, wenn $\lim_{z\to s} |f(z)| \to \infty$.

(iii) $s \in S$ ist genau dann eine wesentliche Singularität, wenn $\lim_{z\to s} |f(z)|$ weder als eigentlicher oder uneigentlicher Grenzwert existiert.

Insbesondere genügt es jeweils, die Bedingung in einer Karte zu überprüfen, die s enthält.

Beweis: Sei $s \in S$ eine hebbare Singularität. Nach FT 1ist $f \circ \phi^{-1}$ auf einer Umgebung von $\phi(s)$ beschränkt, also f auf einer Umgebung von s. Alle anderen Eigenschaften folgen genauso. □

Beispiel. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gitter. Eine meromorphe Funktion $f : \mathbb{C}/\Omega \to \mathbb{C}$ ist dasselbe wie eine elliptische Funktion zum Gitter Ω.

Beweis: Eine Funktion auf $\mathbb{C}/\Omega$ ist dasselbe wie eine Ω-periodische Funktion auf $\mathbb{C}$. Die Meromorphie-Bedingung ist diesselbe. □

Definition 1.5. *Seien X und Y Riemannsche Flächen. Eine stetige Abbildung $f : X \to X'$ heißt* holomorph, *wenn für jedes Paar von Karten $\phi : U \to V$ auf X und $\psi : U' \to V'$ auf X' die Abbildung*

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap f^{-1}(U')) \to V'$$

holomorph ist. Sie heißt biholomorph*, wenn sie bijektiv und holomorph ist. Zwei Riemannsche Flächen heißen* isomorph*, wenn es eine biholomorphe Abbildung $X \to X'$ gibt.*

Bemerkung. Es genügt, die Bedingung in einem Atlas zu überprüfen. Ist f biholomorph, dann ist auch die Umkehrabbildung holomorph.

Lemma 1.6. *Eine holomorphe Abbildung $f : X \to \mathbb{C}$ ist dasselbe wie eine holomorphe Funktion.*

Beweis: Wir machen $\mathbb{C}$ zu einer Riemannsche Fläche mit der Identität als Karte. Die Bedingung in Karten ist dann diesselbe für Abbildungen und Funktionen. Zu zeigen bleibt: Ist $f : X \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, dann ist die Abbildung stetig. Stetigkeit ist eine lokale Eigenschaft, kann also auf einer offenen Überdeckung überprüft werden, z.B. auf den offenen Teilmengen eines Atlas. Sei $\phi : U \to V$ eine Karte. Nach Voraussetzung ist $f \circ \phi^{-1}$ holomorph, also stetig. Da ϕ ein Homöomorphismus ist, ist dann auch $f = f \circ \phi^{-1} \circ \phi$ stetig. $\square$

Wir betrachten nun holomorphe Abbildungen $f : X \to \hat{\mathbb{C}}$. Wir überdecken $\hat{\mathbb{C}}$ durch die Karten $\mathbb{C}$ und $U_\infty = \hat{\mathbb{C}} \smallsetminus \{0\}$. $X_\infty = f^{-1}(\infty)$. Auf $X \smallsetminus X_\infty$ definiert f eine gewöhnliche holomorphe Funktion. Sei also nun $x \in X$ mit $f(x) = \infty$. Da f stetig ist, ist $f^{-1}(U_\infty)$ offen in X. Nach Verkleinern gibt es daher eine Karte $\phi : U \to V$ um x mit $f(U) \subset U_\infty$. Ohne Einschränkung ist U zusammenhängend. Nach Voraussetzung ist die Abbildung

$$\tilde{f} : V \xrightarrow{\phi^{-1}} U \xrightarrow{f} U_\infty \xrightarrow{z \mapsto z^{-1}} \mathbb{C}$$

holomorph. Sie nimmt in $\phi(x)$ den Wert 0 an. Wegen der Stetigkeit von $\tilde{f}$ gilt dann

$$\lim_{v \to \phi(x)} \tilde{f}(v) = 0.$$

Dies impliziert dann auch

$$\lim_{v \to \phi(x)} |\tilde{f}(v)| = 0 \Rightarrow \lim_{u \to x} |f(u)| = \infty.$$

Dies ist fast die Definition von meromorph – wir müssen noch zeigen, dass x eine isolierte Singularität ist. Nach dem Identitätssatz ist entweder $\tilde{f}$ konstant gleich 0 (also $f|_U = \infty$) oder der Wert 0 ist isoliert (also x isolierte Singularität von f). Tatsächlich folgt aus dem Identitätssatz, dass entweder f konstant ∞ auf ganz X ist, oder X_∞ Meng von isolierten Punkten.

Satz 1.7 (Identitätssatz)**.** *Seien $f, g : X \to Y$ holomorphe Abbildungen von Riemannschen Flächen, die auf einer Teilmenge $A \subset X$ übereinstimmen, die einen Häufungspunkt $a \in X$ besitzt. Dann ist $f = g$.*

Beweis: Sei G die Menge der Punkte $x \in X$, die eine Umgebung besitzen auf der $f = g$ gilt. Diese Menge ist nach Voraussetzung offen. Sei $x \in \partial G$ ein

Randpunkt. Wegen Stetigkeit gilt $f(x) = g(x)$. Wir wählen Karten $\phi : U \to V$ bei x und $\psi : U' \to V'$ bei $f(x)$. Ohne Einschränkung gilt $f(U), g(U) \subset U'$. Sei $\tilde{f} = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$, $\tilde{g} = \psi \circ g \circ \phi^{-1}$. Nach Voraussetzung sind beides holomorphe Abbildungen $V \to V'$. Die offenen Menge U hat nicht-leeren Schnitt mit G, da x ein Rankpunkt ist. Also enthält V eine nicht-leere offene Teilmenge, auf der $\tilde{f}$ und $\tilde{g}$ übereinstimmen. Nach dem Identitätssatz stimmen sie dann auf ganz V überein, also f und g auf ganz U, insbesondere in x. Damit ist G auch abgeschlossen. Da X zusammenhängend ist, gilt entweder $G = X$ oder $G = \emptyset$. Eine weitere Argumentation mit dem Identitätssatz impliziert, dass $a \in G$, als sind wir im ersten Fall. □

Lemma 1.8. *Sei X zusammenhängende Riemannsche Fläche, $f : X \to \hat{\mathbb{C}}$ holomorph. Dann ist f entweder konstant gleich ∞ oder f definiert eine meromorphe Funktion. Umgekehrt definiert eine meromorphe Funktion $f : X \to C$ eine holomorphe Abbildung nach $\hat{\mathbb{C}}$.*

Beweis: Wir vergleichen f mit der konstanten Abbildung nach ∞. Stimmen die beiden in eine Umgebung eines x überein, so auch in ganz X. Dann zeigt unsere Argumentatio von oben, dass die Funktion meromorph ist.

Ist umgekehrt $f : X \to \mathbb{C}$ meromorph mit Polen in einer Menge vom isolierten PUnkten X_∞, so definiereren wir $f(x) = \infty$ für $x \in X_\infty$. Sei $\phi : U \to V$ eine Karte bei x. Ohne Einschränkung nimmt f auf U den Wert 0 nicht an (dieser muss ebenfalls isoliert sein!). In der Karte U_∞ um $\infty \in \hat{\mathbb{C}}$ und der Karte f ist die Holomorphiebedingung erfüllt, da der Kehrwert einer nullstellenfreien meromorphen Abbildung holomorph ist. Stetigkeit der fortgesetzten Abbildung folgt aus Holomorphie. □

Schließlich halten wir fest, dass Riemannsche Flächen eine Kategorie bilden:

Lemma 1.9. *Seien X, Y, Z Riemannsche Flächen.*

(i) Die Identität $\mathrm{id} : X \to X$ ist eine holomorphe Abbildung.

(ii) Sind $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ holomorph, dann auch $g \circ f : X \to Z$.

Beweis: Die erste Aussage ist trivial. Sei $x \in X$ mit Bildpunkt y in Y und z in Z. Sei $\phi_z : U_z \to V_z$ eine Karte bei bei z. Sei $\phi_y : U_y \to V_y$ eine Karte bei y. Ohne Einschränkung gilt $g(U_y) \subset U_z$. Sei $\phi_x : U_x \to V_x$ eine Karte bei x. Ohne Einschränkung ist $f(U_x) \subset U_y$. Wir übrprüfen nun Holomorphie von $g \circ f$ in x in diesen Karten. Nach Voraussetzung sind $\phi_y \circ f \circ \phi_x^{-1}$ und $\phi_y \circ g \circ \phi_y^{-1}$ holomorph, also auch die Komposition $\phi_x \circ g \circ f \circ \phi_x^{-1}$. □

Lokale Eigenschaften

Satz 1.10 (Satz von der lokalen Gestalt)**.** *Sei $f : X \to Y$ nicht-konstante holomorphe Abbildung von Riemannschen Flächen. Sei $x \in X$. Dann gibt es*

Karten $\phi : U \to V$ *bei* x *und* $\psi : U' \to V'$ *bei* $f(x)$, *so dass* $\phi(x) = 0$, $\psi(x) = 0$ *und*

$$F = \psi \circ f \circ \phi : V \to V'$$

von der Form $z \mapsto z^n$ *für alle* $z \in V$. *Die Zahl* n *ist unabhängig von der Wahl der Karten.*

Beweis: Wir wählen zunächst Karten $\phi_1 : U_1 \to V_1$ bei x und $\psi_1 : U_1' \to V_1'$ bei $f(x)$ mit $f(U_1) \subset U')$. Sei $F_1 : V_1 \to V_1'$ die induzierte Funktion. Sie ist holomorph, da f holomorph. Sie ist nicht-konstant, da f nicht-konstant (und mit Identitätssatz da X zusammenhängend). Nach dem Satz von der lokalen Gestalt aus der Funktionentheorie gibt es es eine Umgebung V von $\phi_1(x) \in V_1$ und eine biholomorphe Funktion $\phi_2 : V \to V'$ mit $\phi_2(\phi(x) = 0$ und $F_1\phi_2^{-1}$ von der Form $z \mapsto z^n$. Wir setzen $U = \phi_1^{-1}(V)$ und $U' = f(U) = (\phi_1')^{-1}(V')$, $\phi = \phi_2\phi_1$ und $\psi = \psi_1'$. Dann hat F die gewünschte Gestalt.

Die Zahl n ist unabhänig von der Wahl der Koordinaten, da sie als Anzahl der Punkte in einer kleinen Umgebung von x bestimmt werden kann, die auf den selben Bildpunkt abgebildet werden können. □

Definition 1.11. *Sei* $f : X \to Y$ *wie im Satz. Dann heißt* $n = v(x, f)$ Vielfachheit *oder* Verzeigungsindex *von* f *in* x. *Die Abbildung heißt* unverzweigt, *wenn alle Punkte die Vielfachheit* 1 *haben.*

Eine Abbildung ist genau dann unverzweigt in x, wenn es eine Umgegung gibt, in der f injektiv ist.

Korollar 1.12. *Sei* $f : X \to Y$ *injektive holomorphe Abbildung von Riemannschen Flächen. Dann ist* $f : X \to f(X)$ *biholomorph.*

Beweis: Da die Abbildung injektiv ist, ist sie nicht nicht-konstant und unverzweigt. Nach dem Satz von der lokalen Gestalt ist sie lokal von der Form $z \mapsto z$, also biholomorph. Daher ist auch die Umkehrabbildung biholomorph. □

Korollar 1.13. *Sei* $f : X \to Y$ *nicht-konstante holomorphe Abbildung Riemannscher Flächen. Dann ist* f *offen.*

Beweis: Dies gilt für $z \mapsto z^n$, da die Abbildung holomorph ist. □

Stetige offene Abbildungen mit diskreten Fasern heißen auch *Überlagerungen.* Nicht-konstante holomorphe Abbildungen sind also automatisch Überlagerungen.

Korollar 1.14. *Sei* X *kompakte Riemannsche Fläche,* $f : X \to \mathbb{C}$ *holomorphe Funktion. Dann ist* f *konstant.*

Beweis: Sei f nicht konstant. Die Menge $f(X)$ ist dann offen. Sei ist als Bild einer kompakten Menge kompakt, also beschränkt und abgeschlossen in $\mathbb{C}$. Dies ist ein Widerspruch. □

Korollar 1.15. *Sei $f : X \to Y$ holomorphe Abbildung von Riemannschen Flächen. dann ist f genau dann unverzweigt, wenn es ein lokaler Homöomorphismus ist, d.h. die Abbildung ist offen und jeder Punkt hat eine Umgebung U, so dass $f|_U : U \to f(U)$ ein Homöomorphismus ist.*

Beweis: Wenn f unverzweigt ist, dann ist f lokal von der Form $z \mapsto z$, also ein Homöomorphismus. Ist umgekert f nicht unverzweigt, so ist f entweder konstant oder es gibt einen Punkt, in dessen Umgebung f von der Form $z \mapsto z^n$ mit $n > 1$ ist. Dann ist f in keiner Umgebung dieses Punktes injektiv. □

Beispiel.

(i) Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gitter, $\pi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Omega$ die Projektion. Dann ist π unverzweigt.

(ii) Sei $G \subset \mathbb{C}$ Gebiet. Dann ist die Inklusion unverzweigt.

Definition 1.16. *Eine nicht-konstante holomorphe Abbildung $f : X \to Y$ Riemannscher Flächen heißt* unverzweigte unbegrenzte Überlagerung*, wenn jeder Punkt $y \in Y$ eine Umgebung U hat, so dass*

$$f^{-1}U \cong F \times U$$

für eine diskrete Menge F (Isomorphie als Riemannsche Flächen oder äquivalent als topologische Räume).

Bemerkung. Es ist dann automatisch $F \cong f^{-1}(y)$. Diese Menge ist diskret. In der Topologie nennt man solche Abbildungen auch oft einfach nur *Überlagerung*.

Beispiel. π von oben ist eine unbegrenzte unverzweigte Überlagerung, die Inklusion $G \subset \mathbb{C}$ nicht (falls $G \neq \mathbb{C}$).

Wir wollen ungebrenzte Überlagerungen besser verstehen. Dies ist im kompakten Fall relativ einfach. Tatsächlich ist dies Voraussetzung zu stark.

Definition 1.17. *Eine holomorphe Abbildung $f : X \to Y$ von Riemannschen Flächen heißt* eigentlich*, wenn Urbilder kompakter Mengen kompakt sind.*

Ist f nicht konstant, so hat insbesondere jeder Punkt nur endlich viele Urbilder.

Beispiel.

(i) Wenn f konstant ist, dann ist es genau dann eigentlich, wenn X kompakt ist.

(ii) Ist Y kompakt, f eigentlich, so ist X kompakt.

Lemma 1.18. *Sei $f : X \to Y$ nicht-konstante Abbildung Riemannscher Flächen. Sei X kompakt. Dann ist f eigentlich.*

Beweis: Sei $B \subset Y$ kompakt. Dann ist B abgeschlossen. Da f stetig ist, ist $f^{-1}(B) \subset X$ abgeschlossen. Abgeschlossenen Teilmengen kompakter Mengen sind kompakt. □

Bemerkung. Der letzte Schluss benutzt hausdorff!

Korollar 1.19. *Sei $f : X \to Y$ nicht-konstante holomorphe Abbildung Riemannscher Flächen. Sei X kompakt. Dann ist f surjektiv und jeder Punkt von Y hat endliche viele Urbilder.*

Beweis: Das Bild von f ist kompakt und offen. Da Y zusammenhängend ist, ist dies ganz Y. Die zweite Aussage folgt direkt aus eigentlich. $\square$

Lemma 1.20. *Sei $f : X \to Y$ holomorphe eigentliche Überlagerung. Dann ist f abgeschlossen, d.h. Bilder abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen. Sei $y \in Y$ und W eine offene Umgebung von $f^{-1}(y)$. Dann gibt es eine offene Umgebung U von y mit $f^{-1}(U) \subset W$.*

Beweis: Sei $A \subset X$ abgeschlossen. Wir überdecken Y durch "abgeschlossene Kreisscheiben", d.h. homöomorphe Bilder von abgeschlossenen Kreisscheiben $\overline{B} = \overline{B}_r(z)$ unter Kartenabbildungen. Es genügt zu zeigen, dass $f(A)$ jeder dieser Kreisscheiben in einer abgeschlossenen Menge schneidet. (Ist b ein Randpunkt von $f(A)$, so gibt es eine Folge in $f(A)$ die gegen b konvergiert. Sie liegt irgendwann ganz in der abgeschlossenen Kreisscheibe. Ist der Schnitt von $f(A)$ mit der Scheibe abgeschlossen, so liegt b in $f(A)$.) Das Urbild $f^{-1}(\overline{B})$ ist kompakt, da f eigentlich ist. Daher ist $A' = A \cap f^{-1}(\overline{B})$ kompakt. Als Bild einer kompakten Menge ist $f(A) \cap \overline{B} = f(A')$ kompakt.
Die Menge $Z = X \setminus W$ ist abgeschlossen und f abgeschlossen, also $f(Z)$ abgeschlossen mit $y \notin f(Z)$. Sei $U = Y \setminus f(Z)$. $\square$

Satz 1.21 (Satz von der Blätterzahl)**.** *Sei $f : X \to Y$ eigentlich holomorphe Überlagerung Riemannscher Flächen. Dann ist die Anzahl der Urbilder (mit Vielfachheit gezählt) unabhängig von $y \in Y$, d.h. die Funktion*

$$y \mapsto \sum_{x \in f^{-1}(y)} v(f, x)$$

konstant auf Y.

Beweis: Wir zeigen, dass die Funktion lokal-konstant ist. Da X zusammenhängend ist, muss sie dann konstant sein.
Wir konstruieren Umgebungen genau wie beim letzten Beweis: Sei $y \in Y$, $F = f^{-1}(y)$. Für jedes $x \in F$ wählen wir eine Umgebung U_x wie im Satz von der lokalen Gestalt, d.h. f sieht aus wie $z \mapsto z^{v(f,x)}$. Koordinatenfrei: jeder Punkt von $f(U_x)$ mit Ausnahme von y hat genau $v(f, x)$ verschiedene Urbilder. Ohne Einschränkung sind diese Menge disjunkt. Sei $W = \bigcap_{x \in F} f(U_x)$. Diese Menge ist offen, da f offen und F endlich. Die Menge $U = \bigcup_{x \in F} U_x$ ist eine offene Umgebung von F. Nach Lemma 1.20 gibt es eine offene Umgebung $W' \subset W$ mit $f^{-1}W' \subset U$. Wir ersetzen U durch $U' = f^{-1}W'$, U_x durch $U'_x = U' \cap U_x$. Weiterhin hat jeder Punkt in W' (mit Ausnahme von y) genau $v(f, x)$ verschiedene Urbilder in U'_x und daher $\sum_{x \in F} v(f, x)$ viele in U'. $\square$

Definition 1.22. *Die Konstante aus dem Satz heißt* Blätterzahl *oder* Überlagerungsgrad.

Korollar 1.23. *Sei $f : X \to Y$ unverzweigte eigentliche holomorphe Abbildung Riemannscher Flächen. Dann ist f ungegrenzt und die Anzahl der Urbildpunkte ist unabhängig von $y \in Y$.*

Beweis: Die Aussage über die Anzahl der Urbildpunkte ist ein Spezialfall des letzten Satzes. Die Ungegrenzheit folgt aus dem Beweis des Satzes, wenn man $v(f, x) = 1$ berücksichtigt. □

Korollar 1.24. *Auf einer kompakten Riemannschen Fläche X hat jede nichtkonstante meromorphe Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ ebenso viele Null- wie Polstellen (mit Vielfachheit gerechnet).*

Beweis: Dies ist der Spezialfall einer holomorphen Abbildung $f : X \to \hat{\mathbb{C}}$ und der Werte $0, \infty$. □

Korollar 1.25. *Ein Polynom vom Grad n hat mit Vielfachheit gerechnet genau n Nullstellen in $\mathbb{C}$, insbesondere gilt der Fundamentalsatz der Algebra.*

Beweis: Sei P ein Polynom vom Grad n. Wegen $\lim_{z\to\infty} |P(z)| \to \infty$, hat $P : \hat{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ einen Pol in ∞, definiert also eine holomorphe Abbildung $\hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$. Die Vielfachheit in ∞ ist n, also gibt es auch n Nullstellen. □

Kapitel 2

Divisoren, Differentialformen und Integration

Wir wollen uns nun mit den Ableitungen von holomorphen Funktionen beschäftigen. Wir erinnern uns:
Sei $V \subset \mathbb{C}$ offen $z_0 \in \mathbb{C}$, $f : V \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann hat f eine Ableitung f'. Nahe z_0 kann f eindeutig in eine Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

entwickelt werden. Hierbei ist automatisch $a_0 = f(z_0)$ und $a_1 = f'(z_0)$. Die *Nullstellenordnung* in z_0 ist das minimale $n \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ mit $a_n \neq 0$.
Ist f nur meromorph, so gibt es eine Laurent-Reihenentwicklung

$$f(z) = \sum_{n=N}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Der Koeffizient a_{-1} heißt *Residuum.* Ist $a_N \neq 0$, so heißt N auch *Ordnung* von f in z_0. Für $N > 0$ ist dies die Nullstelleordnung. Für $N < 0$ heißt $-N$ auch *Polstellenordnung.*
Sei nun X eine Riemannsche Fläche, $P \in X$ ein Punkt, $f : X \to \mathbb{C}$ holomorph. Wir wählen eine Karte $\phi_1 : U_1 \to V_1$ bei P mit $\phi_1(P) = 0$ Sei $f_1 = f \circ \phi_1^{-1}$.Dann hat f_1 eine Potenzreihenentwicklung

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

wie oben. Die meisten Daten der Entwicklung sind *nicht* unabhängig von der Wahl der Koordinate. Ist $\phi_2 : U_2 \to V_2$ eine andere Koordinate, $f_2 = f \circ \phi_2^{-1}$

mit Potenzreihe

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n.$$

Dann ist $a_0 = b_0 = f(P)$, aber im allgemeinen $f_1'(0) = a_1 \neq b_1 = f_2'(0)$. Wir verstehen, wie sie zusammenhängen. Sei $\phi_{12} = \phi_2 \circ \phi_1$ die Kartenwechselabbildung, wo sie definiert ist. Dann ist nahe 0

$$f_1 = f_2 \circ \phi_{12}$$

und daher mit Kettenregel

$$f_1'(0) = f_2' \circ \phi_{12} \cdot \phi_{12}'.$$

Wir schreiben suggestiver: $z_1 = \phi_1$, $z_2 = \phi_2$,

$$f_1' = \frac{\partial f}{\partial z_1}, f_2' = \frac{\partial f}{\partial z_2}$$

und dann

$$\frac{\partial f}{\partial z_1} = \frac{\partial f}{\partial z_2} \frac{\partial z_2}{\partial z_1}.$$

Wir können also Funktionen wohldefiniert "in Richtung von Koordinaten" ableiten. Unabhängig von der Wahl der Koordinate ist jedoch die Eigenschaft $\frac{\partial f}{\partial z} \neq 0$. Sie ist äquivalent dazu, dass f lokal biholomorph ist. Ebenso ist die *Nullstellenordnung* wohldefiniert. In der Terminologie des letzten Kapitels handelt es sich um die Vielfachheit $v(f, P)$ für die holomorphe Abbildung $f : X \to \mathbb{C}$ und einen Punkt P mit $f(P) = 0$.

Die analogen Bemerkungen gelten auch im meromorphen Fall. Die Polordnung ist die Vielfachheit der holomorphen Abbildung $f : X \to \hat{\mathbb{C}}$ in einem Punkt P mit $f(P) = \infty$.

Definition 2.1. *Sei X eine Riemannsche Fläche, $f : X \to \mathbb{C}$ meromorph Die* Ordnung *von f in $P \in X$ ist definiert als die Ordnung von f in einer beliebigen Karte. Äquivalent:*

$$\mathrm{ord}_P(f) = \begin{cases} 0 & f(P) \neq 0, \infty \\ v(P, f) & f(P) = 0, f \textit{ nicht konstant} \\ -v(P, f) & f(P) = \infty \\ \infty & f \textit{ konstant } 0 \end{cases}$$

Lemma 2.2. *Die Funktion* $\mathrm{ord}_P : \mathcal{M}(X) \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ *ist eine* Bewertung, *d.h.*

$$\mathrm{ord}_P(fg) = \mathrm{ord}_P(f) + \mathrm{ord}_P(g)$$
$$\mathrm{ord}_P(f + g) \leq \min(\mathrm{ord}_P(f), \mathrm{ord}_P(g))$$
$$\mathrm{ord}_P(f) = \infty \Leftrightarrow f = 0 \textit{ konstant}$$

Beweis: Klar. □

Definition 2.3. *Sei $f \in \mathcal{M}(X)$ nicht konstant gleich 0. Dann heißt die Abbildung*

$$(f) : X \to \mathbb{Z}, P \mapsto \mathrm{ord}_P(f)$$

(Haupt)-Divisor von f.

Definition 2.4. *Sei X Riemannsche Fläche, $U \subset X$ offen. Eine Abbildung*

$$D : U \to \mathbb{Z}$$

heißt Divisor*, wenn D lokal endlich ist, d.h. jeder Punkt $P \in U$ hat eine Umgebung, in der es nur endlich viele Punkte Q gibt, in denen $D(Q) \neq 0$.*

Lemma 2.5. *Jeder Hauptdivisor ist ein Divisor.*

Beweis: Sei (f) ein Hauptdivisor. Angenommen, P hat eine kompakte Umgebung, in der D unendlich oft den Wert 0 annimmt. Dann hat die Menge der Nullstellen eine Häufungspunkt. Nach dem Nullstellensatz ist f dann identisch 0. Dies hat wir ausgeschlossen. Das Argument für Polstellen ist dasselbe. □

Die Umkehrung ist im allgemeine falsch!

Beispiel. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gitter, $X = \mathbb{C}/\Omega$. Sei $D(P) = 0$ für $P \neq 0 + \Omega$, $D(0+\Omega) = -1$. Wäre D ein Hauptdivisor, so hätten wir eine elliptische Funktion mit genau einer Polstelle der Ordnung 1. Wir haben in FT1 gesehen, dass es das nicht gibt.

Lemma 2.6. *Sei D ein Divisor, $P \in X$. Dann gibt es eine offene Umgebung U von P, so dass $D|_U$ ein Hauptdivisor ist.*

Beweis: Wir wählen U so klein, dass P der einzige Punkt von U ist, in dem eventuell $n = D(P) \neq 0$. In lokalen Koordinaten nahe bei P (und innerhalb U) setzen wir $f = z^n$. □

Definition 2.7. *Sei X Riemannsche Fläche, $Y \subset X$ offen. Zwei Divisoren auf Y heißen* (rational) äquivalent*, wenn ihre Differenz ein Hauptdivisor ist.*

Bemerkung. Wir schreiben Divisoren meist als Summe:

$$D = \sum_{i \in I} a_i P_i$$

ist eine Abkürzung für

$$D(P) = \sum_{i \in I, P_i = P} a_i.$$

Lemma 2.8. *Sei X kompakt, D ein Divisor auf X. Dann ist D endliche Linearkombination von Punkten*

$$D = \sum_{i=1}^{n} a_i P_i,$$

d.h. es gibt nur endliche viele Punkte, in denen $D(P) \neq 0$.

Beweis: Jeder Punkt hat eine offene Umgebung, in der P der einzige Punkt mit eventuell $D(P) \neq 0$. Diese Umgebungen überdecken X. Da X kompakt ist, genügt eine endliche Teilüberdeckung. Also gibt es auch nur endliche viele Punkte, in denen D eventuell ungleich 0 ist. □

Wir werden uns systematisch mit Divisoren auf kompakten Riemannschen Flächen beschäftigen, oder solchen, die durch einen Einschränken eines solchen auf eine offene Teilmenge entstehen. Sie sind also immer *endliche* formale Linearkombinationen von Punkten.

Differentialformen

Wir haben gesehen, dass die Ableitung f' *nicht* wohldefiniert ist. Richtungsableitungen $\frac{\partial f}{\partial z}$ bezüglich einer Koordinate z sind wohldefiniert, aber sie existieren nur lokal. Der korrekte Standpunkt ist, dass die Ableitung einer Funktion f eine *Differentialform* ist, nämlich

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z$$

wobei z eine lokale Koordinate ist. Dies ist wohldefiniert: Sind z_1, z_2 zwei lokale Koordinaten, so gilt nach Kettenregel

$$\frac{\partial f}{\partial z_1}\mathrm{d}z_1 = \frac{\partial f}{\partial z_2}\frac{\partial z_2}{\partial z_1}\mathrm{d}z_1 = \frac{\partial f}{\partial z_2}\mathrm{d}z_2.$$

Definition 2.9 (Physikerversion)**.** *Sei X eine Riemannsche Fläche. Eine Differentialform auf X ist lokal gegeben durch einen Ausdruck der Form $g\mathrm{d}z$ für eine holomorphe Funktion g und eine Koordinate z. Ist w eine andere Koordinate, so transformiert sie sich wie*

$$g(z)\mathrm{d}z = g(w)\frac{\partial z}{\partial w}\mathrm{d}w.$$

Mathematiker mögen diese Definition nicht, weil nicht klar ist, was eine Differentialform denn nun *ist*. Wir gehen wie folgt vor:

Definition 2.10. *Sei X eine Riemannsche Fläche, $P \in X$. Sei $\mathcal{O}_P$ der Ring der* Funktionenkeime *von holomorphen Funktionen bei P, d.h. Äquivalenzklassen von holomorphen Funktionen $f : U \to \mathbb{C}$ mit $P \in U$, wobei zwei Keime (U_1, f_1) und (U_2, f_2) äquivalent sind, falls $f_1 = f_2$ in einer Umgebung von P.*

Sei m_P das maximale Ideal der Funktionenkeime (U, f) mit $f(P) = 0$. Elemente von $m_p \smallsetminus m_p^2$ heißen lokale Koordinate *oder* Uniformisierende.

Lemma 2.11. *Der Ring $\mathcal{O}_P$ ist ein diskreter Bewertungsring, d.h. ein Hauptideal mit einzigem maximalem Ideal m_p. Es wird erzeugt von den lokalen Koordinaten. Die Wahl einer lokalen Koordinate z induziert eine Isomorphismus*

$$\mathcal{O}_p \to \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n | \limsup |a_n| < \infty \right\}$$

Die Auswertungsabbildung $f \mapsto f(P)$ induziert eine Isomorphismus

$$\mathcal{O}_P/m_P \to \mathbb{C}.$$

Der Quotient

$$m_P/m_P^2$$

ist ein eindimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum mit Basis die Nebenklasse einer lokalen Koordinate.

Beweis: Die Auswertungsabbildung ist wohldefiniert mit Kern m_P. Sie ist surjektiv, da $\mathcal{O}_P$ die konstanten Funktionen enthält. Also ist $\mathcal{O}_P/m_P \cong \mathbb{C}$ und m_P maximal. Die Elemente in $f \in \mathcal{O}_P \smallsetminus m_P$ haben in P keine Nullstelle. Dann sind sie auch auf einer Umgebung von P invertierbar, also Einheiten in $\mathcal{O}_P$. Sie liegen in keinem maximalen Ideal. Damit ist $\mathcal{O}_P$ lokal.

Nach Wahl einer Karte können wir $\mathcal{O}_P$ mit dem lokalen Ring von $\mathbb{C}$ in 0 identifizieren, also mit konvergenten Potenzreihen. Jede Potenzreihe ungleich 0 ist eindeutig von der Form

$$f = z^n h$$

mit $h(0) \neq 0$. Ist $I \subset \mathcal{O}_0$ ein Ideal, so enthält es mit f auch z^n. Das Ideal wird dann erzeugt von z^n mit z minimal. Insbesondere ist es ein Hauptideal. Der Isomorphismus $m_0/m_0^2 \cong \mathbb{C}$ wird induziert von

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \mapsto a_1.$$

$\square$

Die Abbildung $\mathrm{ord}_P : \mathcal{O}_P \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ ist eine *diskrete Bewertung* auf $\mathcal{O}_P$, d.h. es gelten die Rechenregeln von oben und $m_P = \{f \in \mathcal{O}_P | \mathrm{ord}_P(f) \geq 1\}$.

Definition 2.12. *Sei X eine Riemannsche Fläche, $P \in X$. Dann heißt*

$$T_P^1 = m_p/m_P^2$$

Kotangentialraum *von X in P. Elemente von T_P^1 sind Kotangentialvektoren.*

Die Abbildung $\mathrm{d}_P : f \mapsto f - f(P) \mod m_p^2$ ordnet jedem Funktionkeim einen Kotangentialvektor zu.

Eine (holomorphe) Differentialform *auf $Y \subset X$ ist eine Abbildung $\omega : Y \to \bigcup_{P \in Y} T_P^1$ mit $\omega(P) \in T_P^1$, die lokal im Bild von der Form $g\mathrm{d}f$ ist, d.h. $P \in Y$ hat eine offene Umgebung U, so dass $\omega(Q) = g(Q)\mathrm{d}_Q f$ für eine holomorphe Funktionen $f, g : U \to \mathbb{C}$ und alle $Q \in U$. Der Raum der holomorphen Differentialformen auf Y wird $\Omega(Y)$ geschrieben.*

Die Abbildung

$$\mathrm{d} : \mathcal{O}(Y) \to \Omega(Y), f \mapsto (Q \mapsto \mathrm{d}_Q f)$$

heißt Differential.

Lemma 2.13. *Die Abbildung* d *ist eine* Derivation*, d.h.* $\mathbb{C}$*-linear, und es gilt die Leibniz-Regel*

$$\mathrm{d}(fg) = f\mathrm{d}g + g\mathrm{d}f.$$

In lokalen Koordinaten gilt

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z.$$

Beweis: Die Eigenschaften folgen sofort aus der Formel. Sei $P \in Y$. Sei $z : U \to V$ eine Karte mit $P \in U$. Sei $z_0 = z(P)$. Dann gilt

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

also modulo m_P^2

$$\mathrm{d}_P f = a_1(z - z_0) = a_1 \mathrm{d}z = f'(z_0)\mathrm{d}z.$$

□

Wir behandeln auch den meromorphen Fall.

Definition 2.14. *Sei X eine Riemannsche Fläche, $Y \subset X$ offen. Eine* meromorphe Differentialform ω *auf Y ist eine holomorphe Differentialform auf $Y \setminus S$, wobei S eine abgeschlossene Menge von isolierten Punkten ist, und ω in einer Umgebung von jedem $s \in S$ von der Form $f\mathrm{d}z$ (für eine lokale Koordinate z bei s) mit einer meromorphen Funktion f ist.*

Lemma 2.15. *Sei $f \in \mathcal{M}(Y)$ meromorphe Funktion. Dann ist* $\mathrm{d}f$ *eine meromorphe Differentialform auf Y. Die Menge der meromorphen Differentialformen ist $\mathcal{M}(Y)$-Modul vom Rang höchstens* 1*.*

Beweis: Die erste Aussage ist klar in lokalen Koordinaten.
Ohne Einschränkung ist Y zusammenhängend und $\mathcal{M}(Y)$ ein Körper. Sei ω meromorphe Differentialform ungleich 0. Wir zeigen, dass jede andere Form ω' als $\mathcal{M}(Y)$-Vielfaches geschrieben werden kann. In lokalen Koordinaten ist $\omega = f\mathrm{d}z$ mit f nicht die Nullfunktion und $\omega' = g\mathrm{d}z$, also $\omega' = (g/f)\omega$. Der Faktor (g/f) ist unabhängig von der Wahl der Koordinate und definiert daher eine globale Funktion $h \in \mathcal{M}(Y)$. □

Sei $f\mathrm{d}z$ eine meromorphe Differentialform in einer lokalen Koordinate. Dann hat f eine Null- und Polstellenordnung. Diese ist unabhängig von der Wahl der Koordinate, denn bezüglich einer anderen Koordiate w gilt

$$f\mathrm{d}z = f\frac{\partial z}{\partial w}\mathrm{d}w$$

und der Faktor $\frac{\partial z}{\partial w}$ ist invertierbar, also null- und polstellenfrei.

Definition 2.16. *Sei* ω *mermorphe Differentialform auf* Y*,* $P \in Y$*. Sei* $\omega = f\ z$ *in einer Karte bei* P*. Dann setzen wir*

$$v_P(\omega) = v_P(f)$$

die Ordnung der Differentialform in P*. Der Divisor von* $\omega \neq 0$ *ist definiert als*

$$K = \sum_{P \in Y} v_P(\omega) P.$$

Er heißt kanonischer Divisor*.*

Es gibt also nicht nur einen kanonischen Divisor, sondern mehrere.

Lemma 2.17. *Je zwei kanonische Divisorn sind rational äquivalent.*

Beweis: Seien K und K' die Divisoren zu ω und ω'. Dann gilt $\omega' = h\omega$ mit $h \in \mathcal{M}(Y)$ und daher

$$K' = (h) + K.$$

□

Wegintegrale und Stammfunktionen

Definition 2.18. *Sei* X *Riemannsche Fläche,* $Y \subset X$ *offen,* ω *holomorphe Differentialform auf* Y*. Eine Funktion* F *heißt* Stammfunktion *von* ω*, wenn* $\mathrm{d}F = \omega$*.*

Lemma 2.19. *Je zwei Stammfunktionene unterscheiden sich um eine lokalkonstante Funktion. Lokal hat jede Differentialform eine Stammfunktion.*

Beweis: Sei z eine lokale Koordinate, $\omega = f\mathrm{d}z$. Dann ist F eine Stammfunktion genau dann, wenn $F' = f$. Eine solche Funktion exisitert und ist eindeutig bis auf Konstante. □

Wir wissen bereits aus dem Fall $X = \mathbb{C}$, dass nicht jede holomorphe Differentialform eine Stammfunktion hat, z.B. $\omega = z^{-1}\mathrm{d}z$. Von dort kennen wir auch das Kriterium: f hate eine STammfunktion, wenn jedes Integral über einen geschlossenen Wege verschwindet.

Definition 2.20. *Sei* X *Riemannsche Fläche. Ein* Weg *ist eine stetige Abbildung*

$$\gamma : [a, b] \to X.$$

Er heißt differenzierbar*, wenn* γ *differenzierbar ist, d.h.* γ *verknüpft mit jeder Kartenabbildung ist reell differenzierbar.*

Wir erinnern: Für $U \subset \mathbb{C}$ offen, γ differenzierbar setzen wir

$$\int_\gamma f\mathrm{d}z = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t.$$

Hat f eine Stammfunktion, so gilt

$$\int_\gamma f\mathrm{d}z = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Definition 2.21. *Sei $\gamma : [a,b] \to X$ ein Weg. Sei $f_a \in \mathcal{O}_{\gamma(a)}$ ein Funktionenkeim. Dann heißt $f_b \in \mathcal{O}_{\gamma(b)}$* analytische Fortsetzung *von f_a nach $\gamma(b)$ entlang γ, wenn es eine Folge von Teilpunkten $a = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n = b$ gibt, offene Menge $U_i \subset X$ mit $\gamma([t_{i-1}, i]) \subset U_i$, sowie holomorphe Funktionen $f_i : U_i \to \mathbb{C}$ so dass*

- *$f_0 = f_a$ in $\mathcal{O}_{\gamma(a)}$, $f_n = f_b$ in $\mathcal{O}_{\gamma(b)}$*
- *Die Keime von f_i und f_{i-1} stimmen in $\mathcal{O}_{\gamma(t_{i-1})}$ überein.*

Nach dem Identitätssatz ist die analytische Fortsetzung eindeutig, wenn sie existiert.

Satz 2.22. *Sei $U \subset X$ offen, $\omega \in \Omega(U)$ holomorphe Differentialform. Sei $\gamma : [a,b] \to U$ ein Weg. Sei $F_a \in \mathcal{O}_{\gamma(a)}$ eine Keim einer Stammfunktion von ω bei $\gamma(a)$. Dann existiert die analytische Fortsetzung von F_a entlang γ nach $\gamma(b)$.*

Beweis: Für jeden Punkt $t \in [a,b]$ gibt es eine offene Umgebung $U_t \subset X$ auf der ω eine Stammfunktion F_t hat. Das Urbild von U_t in $[a,b]$ ist offen, daher hat t eine Umgebung $(t - \varepsilon_t, t + \varepsilon_t)$ mit Bild in U_t. Da $[a,b]$ kompakt ist, genügen endliche viele dieser Mengen, um $[a,b]$ zu überdecken. Die Mittelpunkte seien $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$. Die Intervalle um t_i und t_{i+1} überschneiden sich. Sei s_i ein Element dieses Schnittes.
Wir wählen F_{t_0} so, dass die Funktion mit F_a übereinstimmt. Die Stammfunktionen F_{t_i} und $F_{t_{i+1}}$ können in $\gamma(s_i)$ verglichen werden. Ihre Keime unterscheiden sich nur um eine Konstante, da es sich um Stammfunktionen handelt. Wir ändern Schritt für Schritt die Stammfunktion $F_{t_{i+1}}$ so ab, dass die Konstante 0 ist. Dann ist F_{t_n} die gesuchte analytische Fortsetzung. □

Definition 2.23. *Sei X Riemannsche Fläche, $\omega \in \Omega(X)$ und $\gamma : [a,b] \to X$ ein Weg. Dann setzen wir*

$$\int_\gamma \omega = F_b(\gamma(b)) - F_a(\gamma(a))$$

wobei $F_{\gamma(b)}$ die analytische Fortsetzung einer Stammfunktion F_a in $\gamma(a)$ entlang γ ist.

Korollar 2.24. *ω hat genau dann eine Stammfunktion, wenn $\int_\gamma \omega = 0$ für jeden geschlossenen Weg γ.*

Beweis: Das ist jetzt fast trivial: Existiert eine globale Stammfunktion, so verschwinden die Integral nach Definition. Umgekehrt kann durch analytische Fortsetzung eine globale Stammfunktion definiert werden. Sie ist unabhängig von der Wahl des Weges, wenn Integrale über geschlossene Wege verschwinden. □

Definition 2.25. *Sei X ein topologischer Raum. Zwei Wege $\alpha, \beta : [0,1] \to X$ heißen* homotopy*, wenn es eine stetige Abbildung*

$$H : [0,1] \times [0,1] \to X$$

gibt, so dass

- $H(0,t) = \alpha(t)$*,* $H(1,t) = \beta(t)$ *für alle* $t \in [0,1]$*,*
- $H(s,0) = \alpha(0) = \beta(0)$*,* $H(s,1) = \alpha(1) = \beta(1)$ *für alle* $s \in [0,1]$*.*

Präziser: Es handelt sich um eine Homotopie relativ zu $\partial[0,1] = \{0,1\}$.

Theorem 2.26 (Monodromoiesatz)**.** *Sei X eine Riemannsche Fläche, $\alpha, \beta : [0,1] \to X$ zwei Wege homotope Wege mit $\alpha(0) = \beta(0) =: P$ und $\alpha(1) = \beta(1) =: Q$ via der Homotopie H. Sei $f_P \in \mathcal{O}_P$. Die analytische Fortsetzung von f_P existiere entlang jedem Weg $\gamma_s(\cdot) = H(s,\cdot)$. Dann stimmt die analytische Fortsetzung von f_P nach Q entlang α mit der Fortsetzung entlang β überein.*

Beweis: Für Wege in $X \subset \mathbb{C}$ haben wir dies in der Funktionentheorie gezeigt. Der Beweis ist derselbe. Er beruht auf dem Identitätsatz, der Kompaktheit von $[0,1] \times [0,1]$ und darauf, dass dieser Raum zusammenhängend ist. □

Korollar 2.27. *Sei $U \subset X$ offen in einer Riemannschen Fläche. Sei $\omega \in \Omega(U)$. Seien $\alpha, \beta : [0,1] \to U$ homotope Wege. Dann gilt*

$$\int_\alpha \omega = \int_\beta \omega.$$

Beweis: Nach dem Monodromiesatz stimmen die analytischen Fortsetzungen einer Stammfunktion von $\alpha(0) = \beta(0)$ nach $\alpha(1) = \beta(1)$ überein. □

Definition 2.28. *Ein geschlossene Weg heißt* nullhomotop*, wenn er homotop zum konstanten Weg ist.*

Für $P \in X$ heißt die Menge $\pi_1(X,P)$ der Homotopieklassen von Wegen von P nach P Fundamentalgruppe *von X zum Basispunkt P.*

Theorem 2.29 (Cauchyscher Integralsatz)**.** *Sei $U \subset X$ offen in einer Riemannschen Fläche, $\omega \in \Omega(U)$ Sei $\alpha : [0,1] \to U$ nullhomotop in U. Dann gilt*

$$\int_\alpha \omega = 0.$$

Verknüpfen von Wegen macht die Fundamentalgruppe zu einer Gruppe. Diese Gruppe hängt nur von X als topologischer Raum ab!

Beispiel. (i) Sei $X = B_1(0) \smallsetminus \{0\}$. Dann gilt $\pi_1(X, P) = \mathbb{Z}$ für jeden Basispunkt P (Funktionentheorie). Der Isomorphismus ordnet jeder Homotopieklasse die Umlaufzahl um 0 zu.

(ii) Sei $X = \hat{\mathbb{C}}$. Dann ist jeder Weg nullhomotop. Der Beweis ist erstaunlich mühsam. Zuerst muss eine Homotopie zu einem Weg konstruiert werden, der den Punkt ∞ vermeidet. (Übungsaufgabe/Topologiebücher) Nun liegt der Weg ist $\mathbb{C}$ und wird durch eine lineare Homotopie zusammengezogen.

(iii) Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gitter, $X = \mathbb{C}/\Omega$. Dann ist $\pi_1(X, 0+\Omega) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Erzeuger sind die Bilder der Strecken $[0, \omega_1]$, $[0, \omega_2$ für eine Basis ω_1, ω_2 von Ω.

Beweis: Sei $\gamma : [0,1] \to X$ ein geschlossener Weg. Wir liften γ zu einem Weg in $\mathbb{C}$. Dort verbindet er 0 mit einem Gitterpunkt $\omega = a\omega_1 + b\omega_2$. In $\mathbb{C}$ ist dieser Weg homotop zu dem Weg entlang der Gitterkanten. Sein Bild ist $a[0, \omega_1] + b[0, \omega_2]$. □

Insbesondere sind $\hat{\mathbb{C}}$ und $\mathbb{C}/\Omega$ verschiedene topologische Räume, da ihre Fundamentalgruppen nicht übereinstimmen.

Wir betrachten nun wieder eine *meromorphe* Differentialformen.

Definition 2.30. *Sei $U \subset X$ offen in einer Riemannschen Fläche, ω eine meromorphe Differentialform auf U, $P \in U$. In einer lokalen Koordinate bei P sei $\omega = f\mathrm{d}z$. Dann heißt*

$$\mathrm{res}_P\omega = \mathrm{res}_0 f$$

Residuum *von ω in P.*

Lemma 2.31. *Das Residuum ist wohldefiniert.*

Beweis: Wir betrachten eine Kartenumgebung $z : B \to B_1(0)$ und einen Weg in B mit Umlaufzahl 1 um P. Dann gilt

$$\int_\gamma \omega = \mathrm{res}_0 f$$

Dieser Wert ist unabhängig von der Wahl der Koordinate. Zu zeigen ist jetzt noch, dass die Bedingung "Umlaufzahl 1" unabhängig von der Wahl der Koordinate ist. Sei also $B = B_1(0) \subset \mathbb{C}$, $\phi : B \to \mathbb{C}$ biholomorph mit $\phi(0) = 0$, γ ein Weg mit Umlaufzahl 1 in $B \smallsetminus \{0\}$. Wir betrachten die Umlaufzahl von $\phi(\gamma)$ um 0. Sowohl γ als auch $\phi(\gamma)$ erzeugen die Fundamentalgruppe einer punktierten Kreisscheibe, daher kann die Umlaufzahl nur ± 1 sein. Das Vorzeichen ist plus, da holomorphe Abbildungen die Orientierung erhalten. Oder direktes Rechnen:

$$\begin{aligned} 2\pi i n(\phi(\gamma), 0) &= \int_{\phi(\gamma)} \frac{1}{z}\mathrm{d}z = \int_0^1 \frac{(\phi\gamma)'(t)}{\phi\gamma)(t)}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \frac{\phi'(\gamma(t))\gamma'(t)}{\phi(\gamma(t))}\mathrm{d}t = \int_\gamma \frac{\phi'}{\phi}\mathrm{d}z = 2\pi i \,\mathrm{res}_0 \frac{\phi'}{\phi} = 2\pi i \end{aligned}$$

denn das Residuum von g'/g ist die Nullstellenordnung von f in 0. □

Kapitel 3

Garben

Wir sind nun mehrfach auf Fragen gestossen, die lokal eine positive Antwort haben, aber global nicht: lokal ist jeder Divisor eine Hauptdivisor, lokal hat jede Differentialform eine Stammfunktion. Die Sprache der Garben ist für solche Situationen geschaffen. Prototyp einer Garbe ist die Zuordnung

$$U \mapsto \mathcal{O}(U)$$

wobei U die offenen Teilmengen einer Riemannschen Fläche durchläuft.

Definition 3.1. *Sei X ein topologischer Raum. Eine* Prägarbe (von abelschen Gruppen) *$\mathcal{F}$ ordnet jeder offenen Teilmenge U von X eine abelsche Gruppe $\mathcal{F}$ zu,*

$$U \mapsto \mathcal{F}(U)$$

zusammen mit Homomorphismen, den Restriktionabbildungen

$$\varrho_{U,V} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$$

für $V \subset U$, so dass gilt

(i) $\varrho_{U,U} = \mathrm{id}$ *für alle $U \subset X$ offen;*

(ii) $\varrho_{V,W} \circ \varrho_{U,V} = \varrho_{U,W}$ *für $W \subset V \subset U$.*

Wir schreiben auch oft $s|_V := \varrho_{U,V}(s)$. Die Elemente von $\mathcal{F}(U)$ heißen auch Schnitte *von $\mathcal{F}$ über U.*

Ein Morphismus von Prägarben $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ist gegeben durch Homomorphismen $\phi(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ für alle $U \subset X$ offen, die für alle $V \subset U$ mit den Restriktionsabbildungen verträglich sind.

Eine Garbe ist eine Prägarben, für die zusätzlich für jedes $U \subset X$ offen und jede offene Überdeckung $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ gilt:

(i) Für jedes $s \in \mathcal{F}(U)$ mit $s|_{U_i} = 0$ folgt $s = 0$.

(ii) Für jedes Tupel $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ mit $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ gibt es ein (eindeutiges) $s \in \mathcal{F}(U)$ mit $s|_{U_i} = s_i$.

Morphismen von Garben sind Morphismen von Prägarben.

Beispiel. (i) Sei X Riemannsche Fläche, dann sind $U \mapsto \mathcal{O}(U)$, $U \mapsto \mathcal{M}(U)$ und $U \mapsto \Omega(U)$ Garben auf X. Auch $U \mapsto \mathcal{O}(U)^*$ (nullstellenfreie holomorphe Funktionen auf U bezüglich der Multiplikation) definiert eine Garbe.

(ii) Sei X topologischer Raum, dann ist $U \mapsto C(U, \mathbb{R})$ (stetige Funktionen nach $\mathbb{R}$) eine Garbe.

(iii) Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann ist $U \mapsto C^p(X, \mathbb{R})$ (p-mal stetig differenzierbare Funktionen) eine Garbe auf U.

(iv) Sei X eine algebraische Varietät. Dann ist $U \mapsto \mathcal{O}(U)$ (reguläre Funktionen auf U eine Garbe.

(v) Sei X topologischer Raum, A eine abelsche Gruppe. Dann ist $U \mapsto A$ eine Prägarbe (die konstante Garbe), aber meist keine Garbe. Aus der Garbenbedingung folgt nämlich, dass für disjunkte offene Teilmengen U, V gilt $\mathcal{F}(U \cup V) = \mathcal{F}(U) \oplus \mathcal{F}(V)$. Eine Garbe erhält man, wenn man jedem U die lokalkonstanten Funktionen mit Werten in A zuordnet (die konstante Garbe).

Bemerkung. Statt Garben von abelschen Gruppen kann man auch Garben von Mengen, Ringen, $\mathbb{C}$-Vektorräumen etc. behandeln. Die Restriktionsabbildungen müssen dann jeweils in der Kategorie sein.

Mit Prägarben von Garben von abelschen Gruppen kann man rechnen wie mit abelschen Gruppen, d.h. jeder Morphismus hat Kern und Kokern, und es gilt der Homomorphiesatz. Wir kommen darauf zu zurück.

Definition 3.2. *Sei X ein topologischer Raum, $\mathcal{F}$ eine Prägarbe von abelschen Gruppen, $P \in X$ ein Punkt. Dann ist der* Halm *von $\mathcal{F}$ in P definiert als*

$$\mathcal{F}_P = \varinjlim_{P \in U} \mathcal{F}(U)$$

wobei U die offenen Umgebungen von P durchläuft. Explizit: Elemente von $\mathcal{F}_P$ sind Äquivalenzklassen von Paaren (U, s) mit $s \in \mathcal{F}(U)$, wobei $(U, s) \sim (U', s')$ wenn es eine offene Umgebung $V \subset U \cap U'$ von P gibt mit $s|_V = s'|_V$. Die Äquivalenzklasse s_p von (U, s) heißt auch Keim *von s in P.*

Beispiel. Sei X Riemannsche Fläche. Der Halm von $\mathcal{O}$ in P ist der lokale Ring von X in P.

Lemma 3.3. *Sei $\mathcal{F}$ eine Garbe mit $\mathcal{F}_P = 0$ für alle $P \in X$. Dann ist $\mathcal{F} = 0$.*

Beweis: Sei $s \in \mathcal{F}(U)$. Für jedes $P \in U$ gilt nach Voraussetzung $s_P = 0$. Nach Definition gibt es also eine offene Umgebung U_P von P, auf der s mit 0 übereinstimmt, also verschwindet. Diese U_P überdecken U. Nach dem ersten Garbenaxiom folgt $s = 0$. □

Wir sind vor allem an solchen Garben interessiert, die mit der Strukturgarbe zu tun haben.

Definition 3.4. *Sei X eine Riemannsche Fläche. Eine $\mathcal{O}$-Modulgarbe $\mathcal{F}$ ist eine Garbe von abelschen Gruppen zusammen mit Modulstrukturen*

$$\mathcal{O}(U) \times \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(U)$$

verträglich mit den Restriktionsabbildungen. Morphismen von $\mathcal{O}$-Modulgarben sind Morphismen von Garben, die für jedes U mit $\mathcal{O}(U)$-linear sind.

Beispiel. $\mathcal{M}$ und Ω sind Garben von $\mathcal{O}$-Moduln.

Wir kommen nun zu einem zentralen Gegenstand der Vorlesung.

Definition 3.5. *Sei X eine Riemannsche Fläche, D ein Divisor. Sei $\mathcal{O}_D$ die Garbe*

$$U \mapsto \mathcal{O}_D(U) = \{f \in \mathcal{M}(U) | (f) \geq -D|_U\}$$

Hier haben wir die partielle Ordnung auf Divisoren genutzt: $D \geq D'$ bedeutet $D(P) \geq D'(P)$ in jedem Punkt. Ein Divisor mit $D \geq 0$ heißt auch *effektiv*. Wenn er ein Hauptdivisor ist, dann gehört er zu einer holomorphen (nicht nur meromorphen) Funktion.

Beispiel. Für den Nulldivisor erhalten wir $\mathcal{O}$.

Lemma 3.6. *$\mathcal{O}_D$ ist ein natürlicher $\mathcal{O}$-Untermodul von $\mathcal{M}$. Die Isomorphieklasse von $\mathcal{O}_D$ hängt nur von der Äquivalenzklasse von D ab.*

Beweis: Die $\mathcal{O}$-Modulstruktur auf $\mathcal{O}_D$ wird induziert von der $\mathcal{O}$-Modulstruktur auf $\mathcal{M}$. Sei $f \in \mathcal{O}_D(U)$, $g \in \mathcal{O}(U)$. Dann gilt

$$(gf) = (g) + (f) \geq 0 - D$$

also $gf \in \mathcal{O}_D(U)$.
Sei $D' = (f) + D$ für $f \in \mathcal{M}(X)^*$. Wir erhalten eine Isomorphismus

$$\mathcal{O}_{D'} \to \mathcal{O}_D$$

indem wir $s \in \mathcal{O}_{D'}(U)$ auf $f|_U s$ abbilden, denn

$$s \geq -D - (f) \to fs \geq (f) - D - (f) = -D.$$

□

Definition 3.7. *Sei X eine Riemannsche Fläche. Ein* Geradenbündel *auf X ist eine lokal-freie $\mathcal{O}$-Modulgarbe $\mathcal{L}$ vom Rang 1, d.h. jeder Punkt hat eine offene Umgebung U_P auf der es einen Isomorphismus von $\mathcal{O}$-Modulgarben $\mathcal{L}|_U \to \mathcal{O}_D$ gibt. Wir nennen* $\mathrm{Pic}(X)$ *die Menge der Isomorphieklassen von Geradenbündeln auf X.*

Bemerkung. (i) Bezüglich $\otimes_{\mathcal{O}}$ bilden die Elemente von $\mathrm{Pic}(X)$ eine abelsche Gruppe. Wir diskutieren dies nicht weiter, weil es für uns fürs erste nicht wichtig ist.

(ii) Alternativ definiert man wie in der reellen Geometrie ein Geradenbündel als ein komplexes Vektorbündel vom Rang 1, also eine Mannigfaltigkeit $p : L \to X$, so dass jede Faser mit einer Struktur als 1-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum ausgestattet ist, so dass jeder Punkt $P \in X$ eine Umgebung U hat, in der $p^{-1}L \cong U \times \mathbb{C}$ (verträglich mit der Projektion nach U und der Vektorraumstruktur auf den Fasern). Man erhält dann die Garbe $\mathcal{L}$ als holomorphe Schnitte von L. Die Standpunkte sind äquivalent. der obige passt besser zu unseren weiteren Plänen.

Ein Isomorphismus $\phi : \mathcal{L}|_U \to \mathcal{O}$ ist definiert durch ein Element $s \in \mathcal{L}(U)$. Für jedes $V \subset U$ ist dann $\mathcal{L}(V) \to \mathcal{O}(V)$ gegeben als $f \mapsto s|_V f$. Das Element $s|_V$ ist eine Basis für den freien $\mathcal{O}(V)$-Modul $\mathcal{L}(V)$. Je zwei Basiselement unterscheiden sich um eine Einheit, also Multiplikation mit einem Element von $\mathcal{O}(U)^*$.

Satz 3.8. *Für jedes D ist $\mathcal{O}_D$ ein Geradenbündel auf X. Die Abbildung $D \mapsto \mathcal{O}_D$ definiert eine Injektion*

$$\mathrm{Div}(X)/\sim \to \mathrm{Pic}(X).$$

Beweis: Sei P ein Punkt. Dann gibt es eine Umgebung U von P auf der D ein Hauptdivisor ist, $D|_U = (h)$. Der Isomorphismus wird gegeben durch Multiplikation mit h^{-1}: Ist $g \in \mathcal{O}(U)$ so folgt

$$(h^{-1}g) = -(h) + (g) \geq -D + 0$$

und umgekehrt für $f \in \mathcal{O}_D(U)$

$$(hf) = (h) + (f) \geq D - D = 0$$

ist $hf \in \mathcal{O}(U)$. Damit ist $\mathcal{O}_D$ ein Geradenbündel.

Sei nun $\phi : \mathcal{O}_{D_1} \to \mathcal{O}_{D_2}$ ein Isomorphismus. Sei U so klein, dass $\mathcal{O}_{D_1}|_U \cong \mathcal{O}|_U$ und $\mathcal{O}_{D_2}|_U \cong \mathcal{O}|_U$ wie gerade eben. Dann induziert ϕ eine Automorphismus von $\mathcal{O}|_U$, der dann durch Multiplikation mit einem Element aus $\mathcal{O}(U)^*$ gegeben ist. Zurückübersetzt bedeutet dies, dass $\phi|_U$ durch Multiplikation mit einem Element f_U von $\mathcal{M}(U)^*$ gegeben ist. Es ist eindeutig. Daher stimmen f_U und f_V auf $U \cap V$ überein, d.h. nach der Garbenbedingung finden wir ein $f \in \mathcal{M}(X)^*$ mit $f|_U = f_U$ für alle solchen U. Wieder folgt aus den Garbenaxiomen, dass ϕ überall als Multiplikation mit f definiert ist. Es folgt dann $D_2 = D_1 \pm (f)$ (je nach Normalisierung). □

Bemerkung. Tatsächlich ist es ein Gruppenisomorphismus.

Beispiel. Sei $\mathcal{L} = \Omega$, K ein kanonischer Divisor (wenn es ihn gibt!). Dann gilt

$$\Omega \cong \mathcal{O}_K.$$

Beweis: Sei ω eine globale meromorphe Differentialform. Sei $P \in X$, z eine lokale Koordinate auf U bei P. Sei $\omega = f\mathrm{d}z$ mit $f \in \mathcal{M}(U)^*$, also $K|_U = (f)$. Dann definiert

$$\Omega(U) \to \mathcal{O}_K(U) g\mathrm{d}z \mapsto f^{-1}|_U g$$

den gesuchten Isomorphismus. Man sieht leicht, dass sich die Isomorphismen auf den verschiedenen U verkleben. □

Riemann-Roch macht eine Aussge über die Dimension der globalen Schnitt dieser $\mathcal{O}_D$, daher wollen wir diese Objekte besser verstehen.

Definition 3.9. *Sei X kompakte Riemansche Fläche. Dann heißt $L(D) = \mathcal{O}_D(X)$* Linearsystem *zum Divisor D. Sei $l(D) = \dim L(D)$.*

Beispiel. Ist $D = 0$, so gilt $L(0) = \mathcal{O}(X)$ und $l(0) = 1$, denn die einzigen globalen holomorphen Funktionen sind konstant. Ist $D < 0$, so sind die Element von $L(D)$, so haben diese holomorphen Funktion mindestens eine Nullstelle, also ist $l(D) = 0$.

Auf einer kompakten Riemannschen Fläche ist jeder Divisor $D = \sum_{i=1}^n a_n P_i$ endlich. Die Zahl $\deg(D) = \sum_{i=1}^n a_i \in \mathbb{Z}$ heißt *Grad* des Divisors. Wir haben gezeigt, dass jeder Hauptdivisor auf einer kompakten Riemannsche Fläche gleich viele Null- wie Polstellen hat, also $\deg(f) = 0$.

Lemma 3.10. *Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche,* $\deg(D) < 0$. *Dann gilt $l(D) = 0$.*

Beweis: Sei $f \in L(D)$, also $(f) \geq -D$. Dann gilt

$$\deg(f) \geq -\deg(D) > 0.$$

Der einzige solche Hauptdivisor ist 0. □

Damit können wir unser Ziel formulieren:

Theorem 3.11 (Riemann-Roch)**.** *Sei X kompakte Riemannsche Fläche. Dann gibt es eine Zahl $g \in \mathbb{N}_0$ (das* Geschlecht*), so dass für alle Divisoren D auf X gilt*

$$l(D) - l(K - D) = 1 - g + \deg(D).$$

Hier ist K der kanonische Divisor aus Kapitel 2.

Beispiel. (i) Für $D = 0$ erhalten wir

$$l(0) - l(K) = 1 - g + 0 \Rightarrow l(K) = g.$$

Insbesonders ist $g \geq 0$.

(ii) Für $D = K$ erhalten wir

$$g - 1 = l(K) - l(0) = 1 - g + \deg(K) \Rightarrow \deg(K) = 2 - 2g.$$

Aus der konkreten Berechnung des kanonischen Divisors erhält man nun $g = 0$ für $\hat{\mathbb{C}}$ und $g = 1$ für $\mathbb{C}/\Omega$.

(iii) Für $\deg(D) > 2 - 2g$ folgt $l(K - d) = 0$, und daher

$$l(D) = 1 - g + \deg(D).$$

Dies ist der *Satz von Riemann*. Die rechte Seite ist positiv für $\deg(D) > g - 1$.

Korollar 3.12. *Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche. Dann gibt es eine nicht-konstante meromorphe Funktion auf X. Sie kann so gewählt werden, dass sie in einem gewählten Punkt P einen Pols der Ordnung höchgstens $g + 1$ hat und sonst holomorph ist.*

Beweis: Wir setzen im Satz von Riemann-Roch $D = (g+1)P$. Dann gilt $l(D) = 2$, also enthält $L(D)$ auch nicht-konstante Funktionen. □

Insbesondere ist $K = \mathrm{d}f$ dann ein kanonischer Divisor.
Weitere Konsequenzen sind ein Additionsgesetz auf Flächen vom Geschlecht ein oder (für jedes Geschlecht) eine Einbettung in den projektiven Raum. Damit sind alle kompakten Riemannschen Flächen algebraisch. Der Beweis wird uns sehr lange beschäftigen.
Zunächst werden wir eine andere Version ansteuern:

Theorem 3.13 (Kohomologische Version von Riemann-Roch)**.** *Sei X kompakte Riemannsche Fläche. Dann gibt es eine Zahl $g \in \mathbb{N}_0$ (das* Geschlecht*), so dass für alle Divisoren D auf X gilt*

$$l(D) - \dim H^1(X, \mathcal{O}_D) = 1 - g + \deg(D).$$

Dieses Theorem lässt mittels kohomologischem Kalkül relativ einfach mit Induktion über den Grad des Divisors zeigen. Induktionsanfang ist $D = 0$. Wir *definieren*

$$g(X) = \dim H^1(X, \mathcal{O}).$$

In einem zweiten Schritt wird dann gezeigt, dass

$$\dim H^1(X, \mathcal{O}) = \dim \Omega(X)$$

allgemeiner gilt Serre-Dualität für alle Geradenbündel

$$\dim H^1(X, \mathcal{L}) = \dim H^0(X, \Omega \otimes \mathcal{L}^\vee).$$

Der härteste Teil des Beweises ist jedoch die Endlichkeit von $H^1(Xl, \mathcal{O})$.
Offensichtlich müssen wir dafür Kohomologie definieren.

Garben als abelsche Kategorie

Definition 3.14. *Sei X ein topologischer Raum. Ein Morphismus von Prägarben $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ heißt* injektiv *bwz.* surjektiv*, wenn $\phi(U)$ injektiv bzw. surjektiv ist für alle $U \subset X$ offen. Ein Morphismus von Garben $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ heißt* injektiv *bzw.* surjektiv*, wenn $\phi_P : \mathcal{F}_P \to \mathcal{G}_P$ injektiv bzw. surjektiv ist für alle $P \in X$.*

Lemma 3.15. *Ein Morphismus von Garben ist genau dann injektiv, wenn $\phi(U)$ injektiv ist für alle $U \subset X$ offen, d.h. wenn er als Morphismus von Prägarben injektiv ist.*

Beweis: Sei ϕ injektiv als Morphismus von Prägarben. Sei $P \in X$, $s_P \in \mathbb{F}_P$ mit $\phi_P(s_P) = 0$. Der Keim wird repräsentiert durch ein (U, s). Dann ist $(U, \phi(U)(s)) \sim (U, 0)$, also gilt $\phi(U)(s)|_V = 0$ für eine offene Umgebung $V \subset U$ von P. Es gilt $\phi(V)(s|_V) = \phi(U)(s)|_V$ und $\phi(V)$ ist injektiv, also $s|_V = 0$. Dann ist auch $s_P = 0$.
Sei umkehrt ϕ injektiv als Morphismus von Garben. Sei $U \subset X$ offen, $s \in \mathcal{F}(U)$ mit $\phi(U)(s) = 0$. Dann gilt $\phi_P(s_P) = \phi(s)_P = 0$ für alle $P \in U$. Da ϕ_P injektiv ist, gilt $s_P = 0$ für alle $P \in U$. Wir haben bereits gezeigt, dass dies impliziert, dass $s = 0$. □

Beispiel. Sei X eine Riemannsche Fläche. $\mathcal{O}_D \to \mathcal{M}$ ist eine Injektion im obigen Sinn. Für $D \geq D'$ folgt $\mathcal{O}_D \subset \mathcal{O}_{D'}$.

Für Surjektivität ist dieser Zusammenhang *falsch.*

Beispiel. Sei $X = \mathbb{C}$. Wir betrachten

$$\exp : \mathcal{O} \to \mathcal{O}^*, f \mapsto \exp \circ f$$

Sei $U = \mathbb{C}^*$. Dann hat die Funktion $z \in \mathcal{O}^*(U)$ kein Urbild, denn ein solches Urbild wäre eine Funktion mit $\exp(f(z)) = z$, also $f = \log$. (Dasselbe Argument gilt für jede andere Riemannsche Fläche und geeignetes U). Der Morphismus ist nicht surjektiv als Morphismus von Prägarben. Er ist aber surjektiv als Morphismus von Garben, da Logarithmus lokal existiert.

Bemerkung. Jeder Morphismus von Prägarben lässt sich faktorisieren über als eine Surjektion gefolgt von einer Inklusion, Kerne und Kokerne existieren und erfüllen den Homomorphiesatz (einfach). Dasselbe ist auch wahr für Morphismen von Garben. Wir verzichten auf den Beweis, das wir diese Eigenschaft nicht benötigen. Uns genügen Spezialfälle.

Definition 3.16. *Sei X ein topologischer Raum. Eine Sequenz von Prägarben*

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\phi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H}$$

heißt exakt*, wenn $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U) \to \mathcal{H}(U)$ exakt ist, d.h.* $\mathrm{Im}(\phi(U)) = \mathrm{Ker}(\psi(U))$ *für alle $U \subset X$ offen. Eine Sequenz von Garben heißt* exakt*, wenn sie halmweise exakt ist. Eine kurze exakte Sequenz ist eine Sequenz der Form*

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$$

die an jeder Stelle exakt ist.

Beispiel. $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\phi} \mathcal{G}$ ist exakt genau dann, wenn ϕ eine Injektion ist. $\mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} \to 0$ ist exakt genau dann, wenn ψ eine Surjektion ist. Diese Aussage gelten für Prägarben wie für Garben.

Beispiel. Sei X Riemannsche Fläche. Dann ist

$$0 \to 2\pi i\mathbb{Z} \to \mathcal{O} \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}^* \to 0$$

eine kurze exakte Sequenz von Garben. Hier steht $2\pi i\mathbb{Z}$ für die konstante Garbe.

Sei X eine Riemannsche Fläche, D ein Divisor, $Q \in X$ ein Punkt. Wir wollen den Kokern von $\mathcal{O}_{D-Q} \subset \mathcal{O}_D$ ausrechen. Dafür schauen wir uns die Halme an. Für $P \neq Q$ können wir die Garbe zuerst auf $X \setminus \{Q\}$ einschränken. Dort stimmen die beiden Divisoren und daher auch die Garben überein. Der Halm des Kokerns ist 0. Nun sei $P = Q$. Wir schränken uns auf eine Umgebung von Q ein, so dass $D|_U = nQ$. Es folgt

$$(\mathcal{O}_D)_Q = \{\sum_{k=-n}^{\infty} a_k z^k | \text{konvergent}\}$$

und daher

$$(\mathcal{O}_D)_Q/(\mathcal{O}_{D-Q})_Q \cong \mathbb{C}, \sum_{k=-n}^{\infty} a_k z^k \mapsto a_{-n}$$

Der Isomorphismus hängt allerdings von der Wahl der Koordinate ab.

Definition 3.17. *Sei X eine Riemmannsche Fläche, $Q \in X$, A eine abelsche Gruppe. Die* Wolkenkratzergarbe *$i_Q A$ wird definiert als*

$$\imath_Q A \begin{cases} A & Q \in U \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

mit den offensichtlichen Restriktionsabbildungen Identität und Null.

Lemma 3.18. *$i_Q A$ ist eine Garbe mit Halm gleich 0 für alle $P \neq Q$ und Halm gleich A in Q.Ist $\mathcal{F}$ eine Garbe. Dann ist ein Garbenmorphismus $\mathcal{F} \to \imath_Q A$ dasselbe wie ein Gruppenhomomorphismus $\Phi : \mathcal{F}_Q \to A$.*

Ist A ein $\mathbb{C}$-Vektorraum, so ist $i_Q A$ eine $\mathcal{O}$-Modulgarbe. Ist $\mathcal{F}$ eine $\mathcal{O}$-Modulgarbe, so ist $\mathcal{F} \to i_Q A$ genau dann $\mathcal{O}$-linear, wenn $\mathcal{F}_Q \to A$ eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung ist und $m_Q \mathcal{F}_Q \subset \operatorname{Ker} \Phi$.

Beweis: Wir überprüfen die Garbenbedingungen. Sei $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine offene Überdeckung. Falls $Q \notin U$, so ist $Q \notin U_i$ und alle Schnitte verschwinden. Die Garbenbedingungen sind erfüllt. Sein also $Q \in U$. Dann gibt es i_0 mit $Q \in U_{i_0}$. Sei $a \in i_Q A(U) = A$. Sei $a|_{U_i} = 0$ für alle i, also insbesondere $a = 0$ in $i_Q A(U_{i_0} = A$. Dann ist $a = 0$. Seien nun Elemente $a_i \in i_Q A(U_i)$ für $i \in I$

gegeben. Wir betrachten $U_i \cap U_j$. Es gibt zwei Fälle: falls $P \in U_i \cap U_j$, so sind die Restriktionsabbildungen $\varrho_{U_i, U_i \cap U_j}$ und $\varrho_{U_i, U_i \cap U_j}$ gleich der Identität. Es folgt $a_i = a_j$. Wir erhalten ein eindeutiges $a \in A$ mit $a = a_i$ für alle i mit $P \in U_i$. Ist $P \notin U_i$, so ist automatisch $a_i = 0$ und $a|_{U_i} = 0 = a_i$ ebenfalls erfüllt. Wir erhalten einen globalen Schnitt.

Der Halm in Q ist offensichlich A. Sei nun $P \neq Q$. Sei U eine offene Umgebung von P, $s \in i_Q A(U)$. Dann ist $U' = U \smallsetminus \{Q\}$ ebenfalls eine offene Umgebung von P und $s|_{U'} = 0$. Der Halm verschwindet.

Sei $\mathcal{F}$ eine Garbe, $\phi : \mathcal{F} \to i_Q A$. Dann erhalten wir bei Übergang zum Halm $\phi_Q : \mathcal{F}_Q \to A$. Sei umgekehrt $\phi_Q : \mathcal{F}_Q \to A$ gegeben. Wir definieren $\phi(U)$ für jedes U. Für $Q \notin U$ setzen wir $\phi(U) = 0$ (dies ist die einzige Wahl). Für $Q \in U$ setzen wir

$$\phi(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}_Q \to A$$

Dies ist offensichtlich verträglich mit Restriktionsabbildungen.

Ist A ein $\mathbb{C}$-Vektorraum, so wird $i_Q A$ durch Multiplikation mit $f(Q)$ für $f \in \mathcal{O}(U)$, $Q \in U$ zu einer $\mathcal{O}$-Modulgarbe. Sobald $\mathcal{F}_Q \to A$ eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung ist, die über $\mathcal{F}_Q / m_Q \mathcal{F}_Q$ faktorisiert, ist das zugehörige ϕ auch $\mathcal{O}$-linear. $\square$

Bemerkung. Die Voraussetzung Riemannsche Fläche wurde benutzt, um so wissen, dass $\{Q\}$ eine abgeschlossene Menge ist.

Wir können also zusammenfassen:

Lemma 3.19. *Sei X eine Riemmansche Fläche, D ein Divisor, $Q \in X$ ein Punkt. Dann ist die Sequenz*

$$0 \to \mathcal{O}_{D-Q} \to \mathcal{O}_D \to i_Q \mathbb{C} \to 0$$

exakt, wobei die Abbildung $\mathcal{O}_{D-Q} \to i_Q \mathbb{C}$ induziert wird von der natürlichen Abbildung $(\mathcal{O}_D)_Q \to (\mathcal{O}_D)_Q / (\mathcal{O}_{D-Q})_Q \cong \mathbb{C}$.

Kapitel 4

Garbenkohomologie

Definition 4.1. *Sei X ein topologischer Raum, $\mathcal{F}$ eine Garbe auf $\mathcal{F}$. Sei $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X. Dann definieren wir für $p \geq 0$*

$$C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = \prod_{(i_0,\ldots,i_p) \in I^{p+1}} \mathcal{F}(U_{i_0} \cap \ldots U_{i_p}),$$

*die Gruppe der p-*Koketten*. Eine Kokette f ist also durch ein Tupel von $f_{(i_0,\ldots,i_p)}$ gegeben. Für jedes p gibt es eine* Randabbildung

$$\delta^p : C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to C^{p+1}(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$$

gegeben durch die Formel

$$\delta^p(f)_{(i_0,\ldots,i_{p+1})} = \sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j f_{i_0,\ldots,\hat{i}_j,\ldots,i_{p+1}}$$

Sei $Z^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ der Kern von δ^p (die Kozykel*) und $B^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ das Bild von δ^{p-1} (die* Koränder*). Der Quotient*

$$H^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = Z^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) / B^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$$

*heißt p-*te Čech-Kohomologie *zur Überdeckung $\mathfrak{U}$ mit Koeffizienten in $\mathcal{F}$.*

Wir sind nur an den Fällen $p = 0, 1$ interessiert, die wir daher explizt machen. Es ist

$$C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = \prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i)$$
$$C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = \prod_{i,j \in I} \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$$

mit Randabbildung $\delta(f)_{i,j} = f_i - f_j$ (hier lassen wir die Einschränkungabbildung weg, um die Notation nicht zu überfrachten). Es gilt also

$$H^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F})\{(f_i)_{i\in I} | f_i = f_j \text{ für alle } i,j\} = \mathcal{F}(X)$$

wegen der Garbenbedingungen. Weiter ist

$$C^2(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = \prod_{i,j,k\in I} \mathcal{F}(U_i \cap U_j \cap U_k)$$

mit

$$\delta^1((f)_{ijk} = f_{jk} - f_{ik} + f_{ij}.$$

Die 1-Kozykel erfüllen also die *Kozykelbedingung*

$$f_{ij} + f_{jk} = f_{ij}.$$

Die Koränder sind von der Form

$$f_{ij} = f_j - f_i$$

für ein Tupel $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$. Man sieht in diesem Spezialfall, dass Koränder auch Kozykel sind, d.h. die erste Kohomologie ist wohldefiniert. Mit etwas Schreibarbeit folgt dies im allgemeinen Fall.

Beispiel. Sei X Riemannsche Fläche, $\mathcal{F} = i_P A$ eine Wolkenkratzergarbe. Sei $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ eine offen Überdeckung von X. Wir wollen zeigen, dass

$$H^1(\mathfrak{U}, i_P A) = 0$$

(Tatsächlich verschindet alle höhere Kohomologie). Sei

$$(a_{ij}) \in \prod_{i,j\in I} \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$$

ein Kozykel. Da $\mathcal{F}$ Wolkenkratzergarbe ist, betrachten wir nur die Indizes i mit $P \in U_i$. Sei J die Menge dieser Indizes. Für $i,j \in J$ ist $P \in U_i \cap U_j$ und dann $\mathcal{F}(U_i \cap U_j) = A$. Gesucht ist ein Tupel $(b_i)_{i\in J}$ mit $a_{ij} = b_i - b_j$ für alle $i,j \in J$. Sei i_0 ein Index, $b \in A$ ein Element. Wir setzen willkürlich $b_{i_0} = b$. Die gewünschte Gleichheit erzwingt

$$b_i = a_{ii_0} + b_{i_0} = a_{ii_0} + b.$$

Es folgt für $i,j \in I$

$$b_i - b_j = a_{ii_0} - a_{ji_0} = a_{ij}$$

wegen der Kozykelbedingung. Der gesuchte Rand ist gefunden.

Beispiel. Sei $\mathcal{L}$ eine lokalfreie Garbe von $\mathcal{O}$-Moduln. Sei $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ eine offene Überdeckung, so dass $\phi_i : \mathcal{L}|_{U_i} \cong \mathcal{O}|_{U_i}$. Auf $U_i \cap U_j$ erhalten wir also einen Isomorphism

$$\phi_{ij} = \phi_j \circ \phi_i^{-1} : \mathcal{O}|_{U_i\cap U_j} \to \mathcal{O}_{U_i\cap U_j}$$

Dieser wird eindeutig bestimmt durch insbesondere auf globalen Schnitten

$$f_{ij} = \phi_{ij}(1) \in \mathcal{O}(U_i \cap U_j)^*.$$

denn ϕ_{ij} definiert als Multiplikation von f_{ij}. Da ϕ_{ij} ein Isomorphismus ist, muss f_{ij} eine Einheit sein. Man sieht leicht, dass die f_{ij} die Kozykelbedingung erfüllen, d.h. $\mathcal{L}$ definiert eine Kohomologieklasse in $H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}^*)$.

Wann ist der Kozykel ein Korand, d.h. die Klasse trivial? Dies ist der Fall, wenn es ein Tupel von $f_i \in \mathcal{O}(U_i)$ gibt mit $f_{ij} = f_j/f_i$ auf $U_i \cap U_j$. Diese definieren Abbildungen

$$f_i^{-1}\phi_i : \mathcal{L}|_{U_i} \to \mathcal{O}|_{U_i}$$

die auf den Schnitten $U_i \cap U_j$ übereinstimmen, denn

$$f_i^{-1}\phi_i = f_i^{-1}\phi_{ij}^{-1}\phi_j = f_i^{-i} f_i/f_j\phi_j = f_j^{-1}\phi_j.$$

Wir erhalten einen globalen Isomorphismus $\mathcal{L} \to \mathcal{O}$.

Umgekehrt definiert ein Kozykel durch Verkleben ein Geradenbündel. Ist dieses Geradenbündel trivial, so ist der Kozykel bereits ein Korand.

Diese Überlegungen hängen von der Wahl einer Überdeckung ab, auf der $\mathcal{L}$ trivialisiert wird.

Definition 4.2. *Sei X ein topologischer Raum, $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ und $\mathfrak{V} = \{V_j\}_{j\in J}$ offene Überdeckungen von X. Eine* Verfeinerungsabbildung *ist eine Abbildung $\tau : J \to I$, so dass $V_j \subset U_{\tau(j)}$.*

Die Verfeinerungsabbildung ist *nicht* eindeutig. Ein abschreckendes Beispiel ist $\mathfrak{U} = \{X, X\}$, $\mathfrak{V} = \{X\}$. Hier gibt es zwei mögliche Verfeinerungabbildungen.

Verfeinerungsabbildungen induzieren durch Einschränken Abbildungen auf Koketten, Kozykeln und Korändern. Explizit: Sei $f \in C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ ein Kozykel. Dann definieren wir $\tau^* f \in C^p(\mathfrak{V}, \mathcal{F})$ durch

$$(\tau^* f)_{(i_0,\dots,i_p)} = f_{(\tau(i_0),\dots,\tau_{i_p})}$$

Lemma 4.3. *Sei X topologischer Raum, $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ offene Übedeckungen mit einer Verfeinerungsabbildung τ. Sei $\mathcal{F}$ eine Garbe auf X. Dann ist die induzierte Abbildung*

$$H^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to H^p(\mathfrak{V}, \mathcal{F})$$

unabhängig von τ.

Beweis: Wir behandlen nur $p = 0, 1$. Im Fall $p = 0$ erhalten wir jeweils $\mathcal{F}(X)$, und es ist nichts zu zeigen. Sei nun $p = 1$. Seien τ, τ' Verfeinerungsabbildungen. Sei (f_{ij}) ein Kozykel bezüglich $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i\in I}$. Wir betrachten

$$g_{i,j} := (\tau * f)_{i,j} - (\tau'^* f)_{i,j} = f_{\tau i,\tau j} - f_{\tau' i,\tau' j} \in V_i \cap V_j$$

Dieser Kozykel muss berandet werden. Für jedes k gilt $V_k \subset U_{\tau k} \cap U_{\tau' k}$ und wir setzen

$$h_k := f_{\tau k,\tau' k}|_{V_k}$$

und berechnen $\delta^0 h$. Auf $V_k \cap V_l$ gilt

$$\begin{aligned} h_l - h_k &= f_{\tau k,\tau' k} - f_{\tau l,\tau' l} \\ &= f_{\tau k,\tau l} + f_{\tau l,\tau' k} - f_{\tau l,\tau' k} - f_{\tau' k,\tau' l} \\ &= f_{\tau k,\tau l} - f_{\tau',\tau' l} \\ &= g_{k,l} \end{aligned}$$

Der allgemeine Fall geht ähnlich, mit der richtigen Kombinatorik. □

Definition 4.4. *Sei X ein topologischer Raum, $\mathcal{F}$ eine Garbe auf X. Wir definieren die p-*te Čech-Kohomologie *von X mit Koeffizienten in $\mathcal{F}$ als*

$$H^p(X, \mathcal{F}) = \lim_{\mathfrak{U}} H^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$$

wobei der direkte Limes über das System der offenen Überdeckungen geht, mit Übegangsabbildungen induziert von Verfeinerungsabbildungen. Konkret: Elemente von $H^p(X, \mathcal{F})$ werden repäsentiert als Element eines $H^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ für eine offene Überdeckung $\mathfrak{U}$ von X. Zwei solche Repräsentanten zu $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{U}'$ sind äquivalent, wenn es eine gemeinsame Verfeinerung $\mathfrak{V}$ gibt, so dass das Bild in $H^p(\mathfrak{V}, \mathcal{F})$ übereinstimmt.

Wir erhalten also

$$H^0(X, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$$

weil dies für jede Überdeckung stimmt. Der Spezialfall $p = 1$ hat eine gute Zusatzeigenschaft:

Lemma 4.5. *Sei $\mathfrak{V}$ eine Verfeinerung der Überdeckung $\mathfrak{U}$ bezüglich der Verfeinerungsabbildung τ. Dann ist τ^* injektiv.*

Beweis: Sei $f \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ ein Koyzel, so dass $\tau^* f \in B^1(\mathfrak{V}, \mathcal{F})$. D.h. es ist

$$f_{\tau k,\tau l} = g_k - g_l \in \mathcal{F}(V_k \cap V_l)$$

für $g_k \in \mathcal{F}(V_k)$. Wir wollen darauf Element aus $\mathcal{F}(U_i)$ konstruieren. Auf $U_i \cap V_k \cap V_l$ gilt

$$g_k - g_l = f_{\tau k,\tau l} = f_{\tau k,i} + f_{i,\tau l} = f_{i,\tau l} - f_{i,\tau k}$$

also

$$f_{i,\tau k} + g_k = f_{i,\tau l} + g_l$$

Nach dem 2. Garbenaxiom gibt es dann $h_i \in \mathcal{F}(U_i)$ mit $h_i = f_{i,\tau k} + g_k$ auf $U_i \cap V_k$ für alle k. Wir überprüfen, dass dies die gesuchte Berandung ist, also

$$h_j - h_i = f_{ij} \in \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$$

Diese Eigenschaft kann nach dem 1. Garbenaxiom überprüft werden $U_i \cap U_j \cap V_k$ für alle k. Dort gilt

$$h_j - h_i = f_{j,\tau k} + g_k - f_{i,\tau k} - g_k = f_{ij}$$

□

Dies erleichtert das Rechnen mit den Äquivalenzklassen sehr.

Korollar 4.6. *Sei X eine Riemannsche Fläche. Dann gilt*

$$\mathrm{Pic}(X) \cong H^1(X, \mathcal{O}^*).$$

Beweis: Wir haben bereits eine natürliche injektive Abbildung

$$H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}^*) \to \mathrm{Pic}(X)$$

konstruiert. Diese ist verträglich mit Verfeinerung der Überdeckung, daher erhalten wir eine Abbildung.
Sei $\mathcal{L}$ ein Geradenbündel. Dann gibt es eine Überdeckung $\mathfrak{U}$ bezüglich der $\mathcal{L}$ trivialisierbar ist. Also liegt $\mathcal{L}$ im Bild von $H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}^*)$, also auch im Bild von $H^1(X, \mathcal{O}^*)$. □

Wir betrachten nun kurze exakte Sequenzen von Garben

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0.$$

Wir definieren den *Verbindungshomorphismus*

$$\partial : H^0(X, \mathcal{H}) \to H^1(X, \mathcal{F}).$$

Wir arbeiten im kommuativen Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d] & C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{G}) \arrow[r] \arrow[d] & C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{H}) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d] & C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{G}) \arrow[r] \arrow[d] & C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{H}) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & C^2(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \arrow[r] & C^2(\mathfrak{U}, \mathcal{G}) \arrow[r] & C^2(\mathfrak{U}, \mathcal{H})
\end{tikzcd}$$

Die Zeilen sind exakt. Sei $h \in \mathcal{H}(X)$. Nach Voraussetzung ist die Abbildung $\mathcal{G}_P \to \mathcal{H}_P$ surjektiv für alle Punkte P. Also gibt es eine Überdeckung $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ und Elemente $g_i \in \mathcal{G}(U_i)$ so dass $h|_{U_i}$ das Bild von g_i ist. Sei $g = (g_i)_{i\in I}$. Wir betrachten $\delta^0(g) \in C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{G})$. Sein Bild in $C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{H})$ stimmt mit $\delta^0(h) = 0$ überein. Also gibt es ein Urbild $f \in C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$. Dieses ist sogar ein Kozykel, denn das Bild von $\delta^1(f)$ in $C^2(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ ist $\delta^1\delta^0 g = 0$. Wir setzen

$$\partial(h) = [f] \in H^1(X, \mathcal{F}).$$

Der Kozykel hängt ab von der Wahl von $\mathfrak{U}$ und g. Wir zeigen nun die Unabhängigkeit als Kohomologieklasse. Ist $\mathfrak{V}$ eine Vereinerung von $\mathfrak{U}$, so können wir das neue g als Verfeinerung des alten wählen und erhalten im direkten Limes dasselbe Element. Sei nun g' eine andere Wahl für g. Dann ist das Bild von $g - g'$ in $C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{H})$ gleich 0, also liegt das Element bereits in $C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$. Dann ist $f - f'$ das Bild von $g - g'$, also ein Korand.

Bemerkung. Mit ähnlichen Argument konstruiert man Verbindungshomorphismen

$$\partial^p : H^p(X, \mathcal{H}) \to H^{p+1}(X, \mathcal{F}).$$

Theorem 4.7. *Sei X ein topologischer Raum und*

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$$

eine kurze exakte Sequenz von Garben. Dann ist die induzierte Sequenz

$$0 \to \mathcal{F}(X) \to \mathcal{G}(X) \to \mathcal{H}(X) \xrightarrow{\partial} H^1(X, \mathcal{F}) \to H^1(X, \mathcal{G}) \to H^1(X, \mathcal{H})$$

exakt.

Beweis: Die Exaktheit in $\mathcal{F}(X)$ ist die Übereinstimmung von Garben- und Prägarbeninjektivität. Wir betrachten die Stelle $\mathcal{G}(X)$. Sei $g \in \mathcal{G}(X)$ mit Bild 0 in $\mathcal{H}(X)$. Dann verschwindet das Bild von g in $\mathcal{H}_P$ für alle $P \in X$. Nach Defininition von Exaktheit einer Garbensequenz ist dass g_P Bild eines eindeutigen $f_P \in \mathcal{F}_P$. Mit dem ersten und zweiten Garbenaxiom finden wir hieraus einen globalen Schnitt $f \in \mathcal{F}(X)$ dessen Bild g ist.

Wir betrachten un die Stelle $\mathcal{H}(X)$. Sei $h \in \mathcal{H}(X)$ Bild eines Elementes $g \in \mathcal{H}(X)$. In der Konstruktion von ∂h können wir dann mit der Überdeckung $X = X$ arbeiten und dem Element g. Dann verschwindet $\delta^0(g)$, also ist $\partial h = 0$. Sei umgekehrt $h \in \mathcal{H}(X)$ ein Element mit $\partial h = 0$. Sei $\mathfrak{U}$ eine Überdeckung, so dass es $g \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{G})$ mit Bild h gibt. Da die Übergangsabbildungen auf H^1 injektiv sind, ist der daraus konstruierte Repräsentant von ∂h ein Korand. Es gibt also $f \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$, das ∂h berandet. Dies ist ein Urbild von g, also ist $h = 0$.

Wir betrachten die Stelle $H^1(X, \mathcal{F})$. Sei $h \in \mathcal{H}(X)$. Dann sieht man aus dem kommutativen Diagramm, dass das Bild von ∂h in $H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{G})$ von der Form $\delta^1\delta^0 g$ ist, also verschwindet. Sei umgekehrt $\phi \in H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ mit Bild 0 in $H^1(X, \mathcal{G})$, also bereits Bild 0 in $H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{G})$. Dies bedeutet, dass wir ein $g' \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{G})$ finden, der dieses Bild berandet. Sei $h' \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{H})$ sein Bild. Aus dem kommutativen Diagramm sehen wir, dass h' ein Kozykel ist. Es gilt dann $\partial h' = \phi$.

Wir betrachten die Stelle $H^1(X, \mathcal{G})$. Da $\mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ die Nullabbildung ist, gilt dies auch nach Anwenden von H^1. Sei umgekehrt γ Repräsentant einer Klasse $H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{G})$ mit Bild 0 in $H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{H})$. Dann wird dieses Bild berandet, d.h. es gibt $h \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{H})$ mit demselben Bild. Nach Übergang zu einer Verfeinerung $\mathfrak{V}$ finden wir ein Urbild g'' von h in $C^0(\mathfrak{V}, \mathcal{G})$. Wir ändern den Koyzel γ um $\delta^0 g''$ ab. Dann verschwindet bereits das Bild von γ in $C^1(\mathfrak{V}, \mathcal{H})$. Wegen der Exaktheit der Garbensequenz (haben wir oben für X verifiziert, gilt für jedes V_k) gibt es dann ein Urbild in $C^1(\mathfrak{V}, \mathcal{F})$. Es ist automatisch ein Kozykel. Dies ist das gesuchte Urbild der Klasse von ϕ. □

Korollar 4.8. *Sei X eine Riemannsche Fläche, D ein Divisor, P ein Punkt. Dann gibt es eine exakte Sequenz*

$$0 \to L(D) \to L(D+P) \to \mathbb{C} \to H^1(X, \mathcal{O}_D) \to H^1(X, \mathcal{O}_{D+P}) \to 0.$$

Es gilt

$$\dim L(D) + 1 + \dim H^1(X, \mathcal{O}_{D+P} = \dim L(D+P) + \dim H^1(X, \mathcal{O}_D).$$

Beweis: Wir wenden die exakte Garbensequenz an auf die kurze exakte Sequenz

$$0 \to \mathcal{O}_D \to \mathcal{O}_{D+P} \to i_P\mathbb{C} \to 0$$

Die ersten drei Terme sind die jeweiligen globalen Schnitte. Die Kohomologiegruppe $H^1(X, i_P\mathbb{C})$ verschwindet. Die Dimensionsformel folgt daraus mit linearer Algebra: Ist

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

eine kurze exakte Sequenz von Vektorräumen, so gilt

$$\dim A + \dim C = \dim B.$$

Wir spalten unsere Sequenz auf in

$$0 \to L(D) \to L(D+P) \to V \to 0$$
$$0 \to V \to H^1(X, \mathcal{O}_D) \to H^1(X, \mathcal{O}_{D+P}$$

wobei $V \subset \mathbb{C}$ das Bild ist. □

Korollar 4.9. *Angenommen, $H^1(X, \mathcal{O})$ ist endlich-dimensional. Dann gilt die kohomologische Version des Satzes von Riemann-Roch.*

Beweis: Wir kürzen ab $h^1(D) = \dim H^1(X, \mathcal{O}_D)$. Sei $g = h^1(0)$. Nach Voraussetzung ist dies endlich. Zu zeigen ist

$$l(D) - h^1(D) - \deg D = 1 - g$$

Für $D = 0$ gilt diese Aussage nach Definition. Aus dem Korollar wissen wir, dass

$$l(D) - h^1(D) - \deg(D) = l(D + P) - h^1(D + P) - \deg(D + P)$$

für jedes D und P. Mit Induktion über die Koeffizienten des Divisors folgt die Aussage. $\square$

Kapitel 5

Reelle Differentialformen und ihre Kohomologie

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Wir schreiben $\mathcal{E}(U)$ für den Raum der Funktionen $U \to \mathbb{C}$, die unendlich oft reell differenzierbar sind. Dann liegen auch die partiellen Ableitungen $\partial_x f$ und $\partial_y f$ wieder in $\mathcal{E}(U)$. Wir betrachten auch

$$\partial_z = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y), \partial_{\overline{z}} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)$$

Jede Funktion lässt sich schreiben als

$$f(z) = f(z_0) + \partial_z f(z_0)(z - z_0) + \partial_{\overline{z}} f(z_0)(\overline{z} - z_0) + \phi(z)$$

wobei $\phi(z)/|z - z_0| \to 0$ für $z \to z_0$. Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen können formuliert werden als: f ist genau dann holomorph auf U, wenn $\partial_{\overline{z}} f = 0$ auf U. Es gilt dann $f'(z) = \partial_z f(z)$.

Definition 5.1. *Sei X eine Riemannsche Fläche, $U \subset \mathbb{C}$ offen. Wir bezeichnen mit $\mathcal{E}(U)$ den Raum der Funktionen $f : U \to \mathbb{C}$, die beliebig oft reell differenzierbar sind.*

Hierbei wird reelle Differenzierbarkeit in Karten getestet. Diese bilden eine Garbe von Ringe, die $\mathcal{O}$ enthält. Sei $\mathcal{E}_P$ der Halm in P. Sei m_P das maximale Ideal der Funktionenkeime, die in P verschwinden.

Definition 5.2. *Der Quotientenvektorraum m_P/m_P^2 heißt* Kotangentialraum *von X in P. Ist U eine Umgebung von P und $f \in \mathcal{E}(U)$, so ist das Differential von f in P definiert als*

$$d_P f = (f - f(P)) \mod m_P^2.$$

Genauer: wir haben es mit der Komplexifizierung des Tangentialraums einer reellen Mannigfaltigkeit zu tun. Wir stellen den Zusammenhang zum Anfang des Semesters her.

Satz 5.3. *Sei X Riemannsche Fläche. Sei $z = x + iy$ holomorphe Koordinate bei P. Dann bilden die Differentiale $d_P x$ und $d_P y$ eine $\mathbb{C}$-Basis des Kotangetialraums. Ebenso ist $d_P z$ und $d_P \overline{z}$ eine Basis. Für $f \in \mathcal{E}_P$ gilt*

$$d_P f = \partial_x d_P x + \partial_y d_P y = \partial_z d_P z + \partial_{\overline{z}} d_P z$$

Beweis: Sei $f \in \mathcal{E}(U)$ ein Repräsentant eines Elementes von m_P. Wir benutzen die Taylorentwicklung wie oben

$$f = \partial_x f(P)(x - x(P)) + \partial_y f(P)(y - y(P) + \phi$$

Für den Fehlerterm gilt $\phi/|z - z(P)| \to 0$ für $z \to z(P)$.

Behauptung. *$d\phi = 0$, d.h. $\phi - \phi(P) \in m_P^2$.*

(Beweis siehe Kapitelende)
Hieraus folgt, dass $d_P x$ und $d_P y$ den Modul erzeugen. Gleichzeitig haben wir bereits die Formel für $d_P f$ gezeigt. Wir zeigen noch lineare Unabhängigkeit: Sei

$$\alpha d_P x + \beta d_P y = 0 \Leftrightarrow \alpha(x - x(P)) + \beta(y - y(P) \in m_P^2.$$

Wir bilden die partielle Ableitung nach x und erhalten $\alpha \in m_P$, also $\alpha = 0$. Genauso sehen wir $\beta = 0$.
Die Argumente für die Koordinaten $z, \overline{z}$ sehen wir genauso. □

Wir finden den holomorphen Kotangentialraum wieder als Vielfache von $d_P z$, insbesondere ist dieser eindimensionale Untervektorraum unabhängig von der Wahl der holomorphen Koordinate. Man kann auch explizit rechnen: Ist $u = v + iw$ eine andere holomorphe Karte, so ist

$$d_P u = \partial_z u d_P z + \partial_{\overline{z}} d_P \overline{z} \in \mathbb{C} d_P z$$

da die Kartenwechselabbildung holomorph ist. Ebenso ist

$$d_P \overline{u} \in \mathbb{C} d_P \overline{z}.$$

Definition 5.4. *Sei $T_P^{1,0} \subset m_P/m_P^2$ der Unterraum der Differentialen von holomorphen Funktionenkeimen und $T_P^{0,1}$ der Unterraum der antiholomorphen Funktionenkeime.*

Nun können wir Differentialformen 1. Ordnung definieren. Sie sehen lokal aus wie $f\mathrm{d}z + g\mathrm{d}\overline{z}$ mit $f, g \in \mathcal{E}(U)$.

Definition 5.5. *Sei X Riemannsche Fläche, $U \subset X$ offen. Eine Differentialform 1. Ordnung auf U ist eine Abbildung*

$$\omega : U \mapsto \bigcup_{P \in U} m_p/m_P^2$$

mit $\omega(P) \in m_P/m_P^2$. *Sie ist* differenzierbar, *wenn sie lokal geschrieben werden kann als*

$$f\mathrm{d}z + g\mathrm{d}\overline{z}$$

mit $f, g \in \mathcal{E}(U)$. *Der Raum der differenzierbaren Differentialformen erster Ordnung wird* $\mathcal{E}^{(1)}(U)$ *geschrieben. Für* $f \in \mathcal{E}(U)$ *heißt* df *mit* $df(P) = d_P f$ totales Differential *von* f.

Es gilt also $df = \partial_z f \mathrm{d}_P z + \partial_{\overline{z}} f \mathrm{d}\overline{z}$. Es zerlegt sich als $df = \partial f + \overline{\partial} f$, entsprechend der Zerlegung von

$$\mathcal{E}^{(1)}(U) = \mathcal{E}^{1,0}(U) + \mathcal{E}^{0,1}(U)$$

in $T^{1,0}$ und $T^{0,1}$-wertige Differentialformen. Sowohl $\mathcal{E}^{(1)}$ also auch $\mathcal{E}^{1,0}$ und $\mathcal{E}^{0,1}$ sind Garben von $\mathcal{E}$-Moduln. Sie sind lokal-frei vom Rang 2 bzw. 1. Die Garbe Ω ist enthalten in $\mathcal{E}^{1,0}$, aber nicht gleich! Z.B. ist $\overline{z}\mathrm{d}z$ eine $1,0$-Form, aber nicht holomorph.

Bemerkung. Es gilt $\mathcal{O} = \mathrm{Ker}(\overline{\partial} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}^{0,1})$. In diesem Fall ist $df = \partial_z f \mathrm{d}z$, aufgefasst als holomorphe oder differenzierbare Differentialform.

Die Ableitung einer 1-Form ist eine 2-Form. Sie sieht lokal aus wie

$$f\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\overline{z}.$$

Definition 5.6. *Sei* R *ein kommutativer Ring mit* 1. *Sei* M *ein freier* R*-Modul von endlichem Rang. Wir definieren das* äußere Produkt

$$\bigwedge^2 M$$

als den Modul erzeugt von Elemente der Form $m_1 \wedge m_2$ *mit den Rechenregeln:*

$$(\lambda_1 m_1 + \lambda_2 m_2) \wedge m_3 = \lambda_1(m_1 \wedge m_3) + \lambda_2(m_2 \wedge m_3)$$
$$m \wedge m = 0$$

für alle $m_1, m_2 \in M$ *und* $\lambda_1, \lambda_2 \in R$.

Die Abbildung $M \times M \to \bigwedge^2 M$ ist bilinear in beiden Argumenten und alternierend. Ist $e_1, \ldots, e_n$ eine Basis von M, so ist $e_i \wedge e_j$ für $i < j$ eine Basis von $\bigwedge^2 M$.
Wir wenden dies an auf $R = \mathbb{C}$ und $M = m_P/m_P^2$. Lokal lässt es sich auch auf $R = \mathcal{E}(U)$ und $M = \mathcal{E}^{(1)}(U)$.

Definition 5.7. *Eine Differentialform 2. Ordnung ist eine Abbildung*

$$\omega : U \to \bigcup \bigwedge^2 m_p/m_P^2$$

Sie heißt differenzierbar, *wenn sie lokal von der Form* $f\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\overline{z}$ *ist mit* $f \in \mathcal{E}(U)$. *Wir bezeichnen mit* $\mathcal{E}^{(2)}(U)$ *den Raum der differenzierbaren Differentialformen 2. Ordnung.*

Es handelt sich um eine lokal-freie Garbe von $\mathcal{E}$-Moduln vom Rang 1.
Ist $\omega \in \mathcal{E}^{1,0}$ so definieren wir

$$d\omega = \overline{\partial}\omega \in \mathcal{E}^{(2)}$$

lokal als

$$df\mathrm{d}z = \partial_{\overline{z}}f\mathrm{d}\overline{z} \wedge \mathrm{d}z = -\partial_{\overline{z}}f\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\overline{z}.$$

Wir setzen $\partial\omega = 0$. Ist $\omega \in \mathcal{E}^{0,1}$ so definieren wir

$$d\omega = \partial\omega \in \mathcal{E}^{(2)}$$

lokal als

$$df\mathrm{d}\overline{z} = \partial_z f\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\overline{z}.$$

Wir setzen $\overline{\partial}\omega = 0$ Diese Definitionen sind offensichtlich so, dass:

Lemma 5.8. *(i) $d : \mathcal{E}^{(1)} \to \mathcal{E}^{(2)}$ erfüllt die Rechenregel*

$$f\omega \mapsto df \wedge \omega + fd\omega.$$

(ii) Es gilt $\mathrm{d} = \partial + \overline{\partial}$.

(iii) $dd = 0$ als Abbildung $\mathcal{E} \to \mathcal{E}^{(2)}$.

Beweis: Leicht. Die letzte Eigenschaft benutzt $\partial_x\partial_y = \partial_y\partial_x$ für stetig differenzierbare Funktionen, siehe Grundvorlesung. □

Bemerkung. Es gilt

$$\Omega = \mathrm{Ker}(\overline{\partial} : \mathcal{E}^{1,0} \to \mathcal{E}^{(2)})$$

Definition 5.9. *Eine Differentialform ω heißt* geschlossen*, wenn $d\omega = 0$. Sie heißt* exakt*, wenn es ein Funktion f mit $df = \omega$ gibt.*

Bemerkung. Holomorphe Differentialformen sind geschlossen.

Satz 5.10. *Die Sequenz von Garben*

$$0 \to \mathbb{C} \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}^{(1)} \to \mathcal{E}^{(2)} \to 0$$

ist exakt. Lokal ist jede geschlossene Differentialform exakt.

Beweis: Es genügt, dies auf Kreisscheiben in $\mathbb{C}$ zu überprüfen. Für eine Funktion mit Differential 0 verschwindet der Gradient. Daher ist sie konstant.
Sei $\omega = f\mathrm{d}x + g\mathrm{d}y$ geschlossen. Wir rechnen explizt:

$$0 = d\omega = (g_x - f_y)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \Rightarrow g_x = f_y$$

Wir haben in Analysis 2 gesehen, dass diese Differentialgleichung lösbar ist. Wir integrieren f in Richtung x. Die Integrationskonstante (eine Funktion von y) wird durch den Vergleich mit der Interation von g in Richtung y festgelegt.
Sei schließlich $\omega' = h\mathrm{d}x \wedge dy$. Lokal können wir h in Richtung x integrieren und so ein Urbild in $\mathcal{E}^{(1)}$ angeben. □

Satz 5.11 (Dolbeaultsches Lemma)**.** *Sei g eine differenzierbare Funktion auf $B_r(0)$ mit $r \leq \infty$. Dann ist die Differenzialgleichung*

$$\partial_{\overline{z}} f = g$$

lösbar auf $B_r(0)$.

Beweis: Wir wählen ein $0 < \varrho < r$ und eine Funktion A in $\mathcal{E}(U)$, die auf $B_\varrho(0)$ den Wert 1 hat und außerhalb von $B_r(0)$ den Wert 0. Solche Funktionen exisiteren. Im ersten Schritt lösen wir die Differentialgleichung für Ag. Auf dem kleineren Kreis $B_\varrho(0)$ haben wir dann die ursprüngliche Gleichung gelöst.
Wir ersetzen g durch Ag und arbeiten auf $\mathbb{C}$. Wir definieren

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} \frac{g(z)}{z - \zeta} \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\overline{z}.$$

Hinter dem Integral über die Differentialform steckt die allgemeine Formel

$$\int_{\mathbb{C}} h \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{C}} \mu$$

wobei μ das Lebesgue-Maß ist. Der Integrand hat eine Singularität in ζ, daher müssen wir Konvergenz des Integrals überprüfen. Wir gehen zu Polarkoordinaten über, $z = \zeta + re^{i\theta}$ und

$$\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\overline{z} = -2i \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = -2ir \mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\theta$$

und daher

$$f(\zeta) = -\frac{1}{\pi} \int \frac{g(\zeta ire^{i\theta})}{re^{i\theta}} r \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta = -\frac{1}{\pi} \int g(\zeta + re^{i\theta}) e^{-i\theta} \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta$$

In diesen Koordinaten ist es ein gewöhnliches Riemann-Integral über differenzierbare Funktionen.
Wir überprüfen die Differenzialgleichung. Hierbei können wir uns auf ein kompaktes Quadrat einschränken, das den Träger von f enthält. Dann dürfen wir unter dem Integranden differenzieren und erhalten

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(\zeta) = -\frac{1}{\pi} \int \frac{\partial g(\zeta ie^{i\theta})}{\partial \overline{\zeta}} e^{-i\theta} \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\partial g(\zeta + z)}{\partial \overline{\zeta}} \frac{1}{z} \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\overline{z}$$

Wir berechnen das Integral als Grenzwert für $\varepsilon \to 0$ von Integralen über das Äußere von Kreisscheiben $B_\varepsilon(0)$. Außerhalb von 0 gilt

$$\frac{\partial g(\zeta + z)}{\partial \overline{\zeta}} \frac{1}{z} = \frac{\partial g(z + \zeta)}{\partial \overline{z}} \frac{1}{z} = \frac{\partial}{\partial \overline{z}} \left(\frac{g(\zeta + z)}{z} \right) = -d\omega$$

mit

$$\omega(z) = \frac{g(\zeta + z)}{z} \mathrm{d}z$$

Mit dem Satz von Stokes folgt

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{\zeta}}(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{z \notin B_\varepsilon(0)} -d\omega = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \omega$$

Wir berechnen das Integral mittels der Parametrisierung $\theta \mapsto \varepsilon e^{i\theta}$ und erhalten

$$\int_{\partial B_\varepsilon(0)} \omega = i \int_0^{2\pi} g(\zeta + \varepsilon e^{i\theta}) d\theta$$

Der Grenzwert $\varepsilon \to 0$ kann nun unter dem Integral berechnet werden und wir erhalten

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{\zeta}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\zeta) d\theta = g(\zeta).$$

Die Gleichung ist nun auf jedem kleineren Kreis in $B_r(0)$ gelöst. Wir müssen die Lösungen zusammensätzen. Sei $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine streng monoton wachsende Folge von Radien $0 < r_n < r$, die gegen r konvergiert. Wir erhalten Lösungen $f_n \in \mathcal{E}(B_{r_n}(0))$. Die Differenz $g_n = f_{n+1} - f_n$ erfüllt $\overline{\partial} g_n = 0$, also ist $g_n \in \mathcal{O}(B_{r_n}(0))$. Wir änderen induktiv f_{n+1} (und damit auch g_n) um eine ganze Funktion ab, so dass $\|g_n\|_\infty < 2^{-n}$ gilt. Hierfür können wir z.b. auf $B_{r_{n-1}}(0)$ ein geeignetes Taylor-Polynom zu g_n benutzen. Die Folge der f_n konvergiert dann lokal gleichmäßig gegen eine Funktion f. Wenn wir sie schreiben als

$$f = f_n + \sum_{k \geq n} g_n$$

so sehen wir, dass der zweite Summand eine gleichmäßig konvergente Reihe von holomorphen Funktionen ist. Seine Grenzfunktion ist also holomorph und damit reell unendlich oft differenzierbar. Dasselbe gilt ohnehin für f_n. Damit ist f reell differenzierbar. Die Ableitung nach $\overline{z}$ ist g. □

Korollar 5.12. *Sei X Riemannsche Fläche. Dann sind die Sequenzen*

$$0 \to \mathcal{O} \to \mathcal{E} \xrightarrow{\overline{\partial}} \mathcal{E}^{0,1} \to 0$$

und

$$0 \to \Omega \to \mathcal{E}^{1,0} \xrightarrow{\overline{\partial}} \mathcal{E}^{(2)} \to 0$$

exakt.

Beweis: Es geht um die Surjektivität, der Rest ist klar. Beides sind lokale Aussage, die wir auf Kreisscheiben in $\mathbb{C}$ überprüfen können. Dort folgt sie aus dem Dolbeaultschen Lemma. □

Wir haben in diesem Beweis bereits benutzt, dass ich Garben von differenzierbaren Funktione verhalten sich ganz anders verhalten als Garben von holomorphen Funktionen.

Bemerkung. Sei X Riemannsche Fläche, $P \in X$. Dann ist die Abbildung $\mathcal{E}(X) \to \mathcal{E}_P$ surjektiv. Wir können nämlich durch die Wahl einer glatten Übergangsfunktion, die auf einer Kreisscheibe $B_r(0)$ gleich 1 ist und außerhalb von $B_R(0)$ (mit $R > r$) verschwindet, jeden Keim zu einem globalen Schnitt mit kompaktem Träger ausbreiten.

Der Träger eines Schnitte ist die Menge der Punkte mit $f(P) \neq 0$.
Tatsächlich gilt noch mehr:

Satz 5.13. *Sei X eine Riemannsche Fläche mit abzählbarer Topologie, d.h. es gibt eine abzählbare Menge von offenen Mengen, so dass jede offene Menge als Vereinigung von solchen geschrieben werden kann. Dann existiert eine* Teilung der Eins, *d.h. zu jeder offenen Überdeckung $\mathfrak{U} = (U_i)_{i\in I}$ gibt es eine Familie $(\phi_i)_{i\in I}$ von Elementen von $\mathcal{E}(X)$, so dass*

(i) $\phi_i(P)|_{X \smallsetminus U_i} = 0$ *für alle $i \in I$.*

(ii) Jeder Punkt $P \in X$ hat eine offene Umgebung, die nur endlich viele der Träger der ϕ_i trifft.

(iii) $\sum_{i\in I} \phi_i = 1$

Die Voraussetzung wird von $X \subset \mathbb{C}$ erfüllt, da die $B_r(a)$ mit a, r rational die Topologie erzeugen. Sie gilt dann auch für kompakte Riemannsche Flächen (und deren offene Teilmengen), da diese eine endliche Überdeckung durch Teilmengen von $\mathbb{C}$ haben. Es ist ein tiefer Satz, dass die Eigenschaft sogar für *jede* Riemannsche Fläche gilt. Wir brauchen nur den kompakten Fall.

Bemerkung. Sei X eine Riemannsche Fläche mit abzählbarer Topologie. Dann gibt es eine Folge von offenen Mengen

$$G_1 \subset G_2 \subset \cdots \subset \bigcup_j G_j = X$$

so dass $\overline{G}_j$ kompakt ist und in G_{j+1} enthalten.

Beweis: Seien U_i für $i \in \mathbb{N}$ die Menge, die die Topologie erzeugen. Jeder Punkt von X hat eine kompakte Umgebung, daher können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $\overline{U}_i$ kompakt ist. Wir setzen $G_1 = U_1$. Da $\overline{G}_1$ kompakt ist, gibt es eine endliche Menge I von Inidizes mit

$$\overline{G}_1 \subset G_1 \cup \bigcup_{i\in I} U_i =: G_2$$

Wegen $\overline{G}_2 = \overline{G}_1 \cup \bigcup i \in I \overline{U}_i$ ist der Abschluss kompakt. Dieses Verfahren führen wir iterativ fort. $\square$

Beweis des Satzes: Seien G_j für $j \in \mathbb{N}$ offene Mengen wie in der Bemerkung.

Wir setzen $G_0 = \emptyset$. Für $P \in X$ sei i_P der größte Index, so dass $P \in X \smallsetminus \overline{G}_{i_p}$. Wähle $\alpha_P \in I$, so dass $P \in U_{\alpha_P}$. Dann liegt $P \in \overline{G}_{i_p+1} \subset G_{i_P+2}$. Wir wählen weiter eine Karte $\tau : V \to \mathbb{C}$ um P, so dass

$$V \subset U_{\alpha_P} \cap (G_{i_P+2} \setminus \overline{G}_{i_p}).$$

Wir definieren $\psi_P \in \mathcal{E}(X)$ mit Hilfe der Glättungsfunktion aus der Bemerkung so, so dass ψ_P kompakten Träger innerhalb von V hat und auf einer Umgebung $W_P \subset V$ von P mit τ übereinstimmt. Für jeden Index $i \geq 1$ wählen wir eine endliche Menge von Punkten P, so dass die zugehörigen W_P die kompakte Menge $\overline{G}_i \smallsetminus G_{i-1}$ überdecken. Wir ordnen die zugehörigen ψ_P an als Folge ψ_j, $j \in \mathbb{N}$. Jeder Punkt hat dann eine Umgebung, auf der nur endlich viele der ψ_j ungleich 0 sind. Daher ist

$$\psi = \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j$$

wohldefiniert und in $\mathcal{E}(X)$. Für jedes j gibt es ein $i(j) \in I$, so dass der Träger ganz in $U_{i(j)}$ enthalten ist. Die Funktionen

$$\phi_i = \frac{1}{\psi} \sum_{i=i(j)} \psi_j$$

sind die gesuchte Teilung der Eins. $\square$

Satz 5.14. *Sei X eine Riemannsche Fläche mit abzählbarer Topologie. Dann gilt*

$$H^1(X, \mathcal{F}) = 0$$

für jede Garbe von $\mathcal{E}$-Moduln, insbesondere $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}^{(1)}$, $\mathcal{E}^{1,0}$, $\mathcal{E}^{0,1}$, $\mathcal{E}^{(2)}$.

Beweis: Sei $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X. Sei $f \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ ein Kozykel. Sei $(\phi_i)_{i \in I}$ eine Teilung der Eins zu $\mathfrak{U}$. Die Funktion $\phi_j f_{ij} \in \mathcal{E}(U_i \cap U_j)$ setzt sich differenzierbar nach U_i fort. Sei

$$g_i = \sum_{j \in I} \phi_j f_{ij} \in \mathcal{E}(U_i).$$

In jedem Punkt sind nur endlich viele Summanden ungleich 0, daher ist die Summe wohldefiniert. Dann gilt auf $U_i \cap U_j$

$$\begin{aligned} g_i - g_j &= \sum_{k \in I} \phi_k f_{ik} - \sum_{k \in I} \phi_k f_{jk} \\ &= \sum_k \phi_k (f_{ik - f_i k}) = \sum_k \phi_k f_{ij} = f_{ij} \end{aligned}$$

Also verschwindet die Kohomologieklasse. $\square$

Korollar 5.15. *Sei X Riemannsche Fläche mit abzählbarer Topologie. Dann sind die Sequenzen*

$$0 \to \mathcal{O}(X) \to \mathcal{E}(0) \to \mathcal{E}^{0,1}(X) \to H^1(X, \mathcal{O}) \to 0$$

und

$$0 \to \Omega(X) \to \mathcal{E}^{(1,0)}(X) \to \mathcal{E}^{(2)}(X) \to H^1(X, \Omega) \to 0$$

exakt.

Beweis: Wir wenden die lange exakte Kohomologiesequenz auf die Sequenzen aus dem Dolbeaultschen Lemma an. □

Beispiel. Sei $X = \mathbb{C}$. Dann gilt $H^1(\mathbb{C}, \mathcal{O}) = H^1(\mathbb{C}, \Omega = 0$.

Beweis: Die beiden Garben sind tatsächlich isomorph, da dz eine globale Basis von Ω ist. Nach dem Fall $R = \infty$ des Dolbeaultschen Lemmas ist $\mathcal{E}(0) \to \mathcal{E}^{0,1}(X)$ surjektiv. Wegen der Exaktheit folgt $H^1(X, \mathcal{O}) = 0$. □

Noch wichtiger ist der Fall $X = \hat{\mathbb{C}}$. Hierfür eine weitere Rechenregel:

Satz 5.16. *Sei $X = U \cup V$ ein topologischer Raum, $\mathcal{F}$ eine Garbe auf X. Dann ist die Sequenz*

$$0 \to \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(U) \oplus \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U \cap V) \to H^1(X, \mathcal{F}) \to H^1(U, \mathcal{F}) \oplus H^1(V, \mathcal{F}) \to H^1(U \cap V, \mathcal{F})$$

exakt.

Beweis: Dies ist die lange exakte Garbensequenz zu der Sequenz von Garben

$$0 \to \mathcal{F} \to j_{U*}\mathcal{F}|_U \oplus j_{V*}\mathcal{F}|_V \to j_{U \cap V*}\mathcal{F}|_{U \cap V} \to 0$$

wobei

$$j_{U*}\mathcal{F}|_U(W) = \mathcal{F}(W \cap U)$$

Wir überprüfen die halmweise Exaktheit. Sei $P \in U$. In der Definition der Halme nehmen wir den Limes über Umgebgungen $W \subset U$ von P. Daher ist

$$(j_{U*}\mathcal{F}|_U)_P = \mathcal{F}_P \qquad (j_{V*}\mathcal{F}|_V)_P = (j_{U \cap V*}\mathcal{F}|_U)_P \,.$$

Die Sequenz der Halme in P ist also von der Form

$$0 \to A \to A \oplus B \to B \to 0$$

und exakt. Das Argument für $P \in V$ ist genauso. Jeder Punkt liegt in einer der Menge.

Ist $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von X, so ist

$$C^i(\mathcal{U}, j_{U*}\mathcal{F}|_U) = C^i(\mathcal{U} \cap U, \mathcal{F}).$$

Jede Überdeckung von U kann durch Ergänzen von V eine offene Überdeckung von X erweitert werden. Daher gilt

$$H^i(X, j_{U*}\mathcal{F}|_U) = H^i(U, \mathcal{F}).$$

□

Wir wenden dies an auf die offene Überdeckung von $\hat{\mathbb{C}}$ durch die beiden Kopien von $\mathbb{C}$. Zusammen mit dem Beispiel erhalten wir exakte Sequenzen

$$0 \to \mathcal{O}(\hat{\mathbb{C}}) \to \mathcal{O}(\mathbb{C}) \oplus \mathcal{O}(\hat{\mathbb{C}} \smallsetminus \{0\}) \to \mathcal{O}(\mathbb{C}^*) \to H^1(X, \mathcal{O}) \to 0$$

und

$$0 \to \Omega(\hat{\mathbb{C}}) \to \Omega(\mathbb{C}) \oplus \Omega(\hat{\mathbb{C}} \smallsetminus \{0\}) \to \Omega(\mathbb{C}^*) \to H^1(X, \Omega) \to 0$$

Korollar 5.17. *Es gilt*

$$H^1(\hat{\mathbb{C}}, \mathcal{O}) = 0, H^1(\hat{\mathbb{C}}, \Omega) \cong \mathbb{C}$$

via dem Residuum in 0*.*

Beweis: Sei $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^*)$. Dann kann f in Haupt- und Nebenteil zerlegt werden. Ersteres ist holomorph auf $\hat{\mathbb{C}} \smallsetminus \{0\}$, letzteres auf $\mathbb{C}$.
Sei $\omega = g\mathrm{d}z$ eine holomorphe Differentialform auf $\mathbb{C}^*$. Wieder kann g als Laurent-Reihe geschrieben werden. Der Nebenteil ist im Bild von $\Omega(\mathbb{C})$. Eine holomorphe Differentialform auf $\hat{\mathbb{C}} \smallsetminus \{0\}$ hat die Form

$$h(z^{-1})\mathrm{d}(z^{-1}) = -h(z^{-1})z^{-2}\mathrm{d}z$$

wobei h eine ganze Funktion ist. Im Bild liegt also Hauptteile

$$\sum_{n=-\infty}^{-2} a_n z^n.$$

Es fehlt $a{-}1z^{-1}$, also genau der Kern des Residuums. □

Insbesondere gilt der Satz von Riemann-Roch nun für $\hat{\mathbb{C}}$ mit Geschlecht 0.
Für spätere Zwecke halten wir eine weitere Rechenregel fest:

Lemma 5.18 (Leraysches Lemma)**.** *Sei X topologischer Raum, $\mathcal{F}$ Garbe auf X. Sei $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung mit $H^1(U_i, \mathcal{F}) = 0$ für alle $i \in I$. Dann gilt*

$$H^1(X, \mathcal{F}) = H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}).$$

Beweis: Sei $\mathfrak{V} = (V_j)_{j \in J}$ eine Verfeinerung von $\mathfrak{U}$. Sei $\tau : J \to I$ die Verfeinerungsabbildung, also $V_j \in U_{\tau(j)}$. Zu zeigen ist die Surjektivität der induzierten Abbildung auf der Kohomologie. Sei $f = (f_{jj'}) \in Z^1(\mathfrak{V}, \mathcal{F})$. Wir schränken f ein zu einem Kozykel auf U_α. Da $H^1(U_\alpha, \mathcal{F}) = 0$, gibt es eine Kokette

$$(g_{ij})_j \in C^0(\mathfrak{V} \cap U_i, \mathcal{F})$$

mit $g_{ij} - g_{ij'} = f_{jj'}$ auf $V_j \cap V_{j'} \cap U_i$. Auf $V_j \cap V_{j'} \cap U_i \cap U_{i'}$ gilt also

$$g_{ij} - g_{ij'} = g_{i'j} - g_{i'j} \Rightarrow g_{ij} - g_{i'j} = g_{ij'} - g_{i'j'}$$

Nach dem zweiten Garbenaxiom gibt es also $F_{ii'} \in \mathcal{F}(U_i \cap U_{i'}$ mit

$$F_{ii'} = g_{ij} - g_{i'j} \in \mathcal{F}(U_i \cap U_{i'} \cap V_j.$$

Man sieht leicht, dass F ein Koyzkel ist. Weiter setzen wir

$$h_j = g_{\tau(j),j} \in \mathcal{F}(V_j)$$

Man sieht leicht, dass

$$\tau^* F - f = \delta^0 h.$$

□

Wir tragen nach:

Lemma 5.19. *Sei $f : B_r(0) \to \mathbb{C}$ beliebig oft differenzierbar. Sei $z = x_1 + ix_2$. Dann gilt*

$$f(z) = f(0) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(0)x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(0)x_2 + \phi$$

mit $\phi \in m_p^2$.

Beweis: Wir benutzen die Koordinaten $z = x_1 + ix_2$. Die Taylorformel für ergibt

$$f(z) = f(0) + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)x_i + \sum_{i,j} x_i x_j \int_0^1 (1-t)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(tz)\mathrm{d}t$$

Nach Voraussetzung sind die Funktionen unter dem Integral beliebig oft differenzierbar. Dann gilt dies auch fuer die durch das Integral definierte Funktion, wie behauptet. □

Wir können dieses Lemma anwenden auf $\mathcal{F} = \mathcal{O}, \Omega$ und Kreisscheiben.

Kapitel 6

Der Endlichkeitssatz

Wir wollen zeigen:

Theorem 6.1. *Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche. Dann ist $H^1(X, \mathcal{O})$ endlich-dimensional als $\mathbb{C}$-Vektorraum.*

Wir folgen Forster, Kapitel II, §14. Tatsächlich beweisen wir eine technischere Aussage.

Definition 6.2. *Sei B ein topologischer Raum, $A \subset A$ Teilmenge. Dann heißt A* relativ-kompakt*, wenn der Abschluss von A in B kompakt ist. Wir schreiben dann $A \Subset B$.*

Beispiel. Sei X Riemannsche Fläche, $U \subset X$ offen. Dann hat jeder Punkt von U eine Umgebung, die relativ kompakt in U ist, z.B. das Bild einer offenen Kreisscheibe unter einer Kartenabbildung.

Beispiel. Wir haben bereits gezeigt: Wenn X eine Riemannsche Fläche mit abzählbarer Topologie ist, dann ist sie Vereinigung von offene Mengen

$$G_1 \Subset G_2 \Subset \dots$$

Wir werden zeigen:

Theorem 6.3. *Sei X eine Riemannsche Fläche, $Y_1 \Subset Y_2 \Subset X$ offene Teilmengen. Dann hat die Einschränkungsabbildung*

$$H^1(Y_2, \mathcal{O}) \to H^1(Y_1, \mathcal{O})$$

endlich-dimensionales Bild.

Wir erhalten Theorem 6.1, wenn wir $X = Y_2 = Y_1$ setzen.
Wesentliches Hilfsmittel ist die L_2-Norm.

Definition 6.4. *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f \in \mathcal{O}(U)$. Wir definieren*

$$\|f\|_{L^2(U)} = \sqrt{\int_U |f(x+iy)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}x}$$

Die Funktion heißt quadrat-integrierbar*, wenn die Norm endlich ist. Sei $L^2(U, \mathcal{O})$ der Raum der quadrat-integrierbaren holomorphen Funktionen. Für $f, g \in L^2(U, \mathcal{O})$ definieren wir ein Skalar-produkt durch*

$$\langle f, g \rangle = \int_U f\overline{g}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Wir schreiben

$$\|f\|_{L^\infty(U)} = \sup_{z \in U} |f(z)|.$$

Es handelt sich um Normen. Das Skalarprodukt ist wohldefiniert (d.h. endlich) nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$|\langle f, g \rangle| \le \|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2}.$$

Hat U endliches Volumen $\mu(U)$, so gilt

$$\|f\|_{L^2} \le \sqrt{\mu(U)} \|f\|_{L^\infty}$$

Lemma 6.5. *Sei $U = B_R(a)$. Dann bilden die Monome $\phi_n = (z-a)^n$ ein Orthogonalsystem mit*

$$\|\phi_n\|_{L^2} = \frac{\sqrt{\pi} R^{n+1}}{\sqrt{n+1}}.$$

Beweis: Ohne Einschränkung ist $a = 0$. Wir rechnen in Polarkoordinaten $z = re^{i\phi}$. Es ist $\mathrm{d}x\mathrm{d}y = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi$.

$$\int z^n \overline{z}^m \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int r^{n+m} e^{i\phi(n-m)} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi = \int_0^R r^{n+m+1}\mathrm{d}r \int_0^{2\pi} e^{i\phi(n-m)}\mathrm{d}\phi$$

Für $n \ne m$ verschwindet das Integral über ϕ. Für $n = m$ liefert es den Beitrag 2π, also

$$\|\phi_n\|_{L^2}^2 = 2\pi \frac{R^{2n+2}}{4n+2}$$

□

Wir setzen daher

$$e_n = \frac{\phi_n}{\|\phi_n\|_{L^2}} = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{\pi} R^{n+1}} (z-a)^n$$

.

Korollar 6.6. *Das System der e_n ist eine Hilbert-Basis von $L_2(B_R(a))$, d.h. sie sind ein Orthonormalsystem und der aufgespannte Vektorraum ist dicht und für $f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e_n$ gilt $c_n = \langle f, e_n \rangle$ und*

$$\|f\|_{L^2}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2.$$

Mit anderen Worten: für $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n \in L^2(U, \mathcal{O})$ gilt

$$\|f\|_{L^2} = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \frac{\pi R^{2n+2}}{n+1}}$$

Beweis: Da f holomorph ist, gilt

$$f(z) = \sum_{n_0}^{\infty} a_n (z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \phi_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e_n.$$

Die Konvergenz ist gleichmäßig auf $B_r(a)$ für $r < R$. Daher vertauschen Integral und Reihe, und es gilt

$$\langle f, \phi_N \rangle_{L^2(B_r)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \langle \phi_n, \phi_N \rangle = a_n \|\phi_N\|_{L^2(B_r)}.$$

Danach gehen wir zum Grenzwert $r \to R$ über. Dies ist möglich, da der Integrand quadrat-integrabel ist. Die Formel für die Norm gilt für jede endliche Teilreihe. Auf jeder kleineren Kreisscheibe gilt sie wieder wegen gleichmäßiger Konvergenz, im Grenzwert dann auf ganz $B_R(a)$. □

Satz 6.7. *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $r > 0$ und $U_r = \{z \in U | B_r(z) \subset U\}$. Dann gilt für $f \in L^2(U, \mathcal{O})$*

$$\|f\|_{L^\infty(U_r)} \leq \frac{1}{\sqrt{\pi} r} \|f\|_{L^2)(U)}.$$

Beweis: Sei $a \in U_r$. Wir benutzen die Taylorentwicklung um a. Aus der Formel im Korollar folgt insbesondere

$$|f(a)| = |a_0| = \frac{1}{\sqrt{\pi} r} |c_0| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi} r} \|f\|_{L^2(B_r(a)} \leq \frac{1}{\sqrt{\pi} r} \|f\|_{L^2(U)}.$$

Davon nehmen wir das Supremum. □

Korollar 6.8. *$L^2(U, \mathcal{O})$ ist vollständig.*

Beweis: Sei $(f_n)_{n \geq 1}$ eine Cauchy-Folge in $L^2(U, \mathcal{O})$. Dann konvergiert die Folge auf jeder Kreisscheiben in U gleichmäßig. Daher existiert die punktweise Grenzfunktion (hier kommt es auf nicht auf die Wahl der Norm an) und die

Grenzfunktion ist holomorph. Wir wollen nun L^2-Konvergenz zeigen. Dies ist eine Anwendung von Fatous Lemma: Seien $g_n : U \to [0,\infty]$ messbar. Dann gilt

$$\int_U (\liminf_n g_n)\mu \leq \liminf_n \int_U g_n\mu.$$

Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $m \in \mathbb{N}$, so dass $\|f_n - f_m\|_{L^2} < \varepsilon$ für alle $n \geq m$. Wir betrachten $g_n = |f_n - f_m|^2$. Es gilt $\liminf g_n = |f - f_m|^2$, also

$$\int_U |f - f_m|^2\mu \leq \liminf \int_U |f_n - f_m|^2\mu < \varepsilon^2.$$

□

Wir kommen zu unserem ersten Endlichkeitsresultat.

Lemma 6.9. *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $V \Subset U$ offen. Dann gilt: Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es einen abgeschlossenen Untervektorraum $X_\varepsilon \subset L^2(U,\mathcal{O})$ von endlicher Kodimension (d.h. $\dim L^2(U,\mathcal{O})/X_\varepsilon < \infty$), so dass*

$$\|f\|_{L^2(V,\mathcal{O})} \leq \varepsilon\|f\|_{L^2(U)}$$

für alle $f \in X_\varepsilon$.

Beweis: Als Vorüberlegung betrachten wir $0 \leq \varrho < r$ und $f \in L^2(B_r(a),\mathcal{O})$ mit $\mathrm{ord}_a f \geq n$. Dann gilt

$$\|f\|_{L^2(B_\varrho(a))} \leq \left(\frac{\varrho}{r}\right)^{n+1} \|f\|_{L^2(B_r(a))}$$

denn $f(z) = \sum_{k=n}^\infty a_k(z-a)^k$ folgt

$$\|f\|^2_{L^2(B_\varrho(a)}) = \sum_{k=n}^\infty \frac{\pi\varrho^{2k+2}}{k+1}|a_k|^2 \leq \sum_{k=n}^\infty \frac{\pi r^{2k+2}}{k+1}|a_k|^2$$

Sei nun $V \Subset U$. Wir überdecken $\overline{V}$ mit Kreisscheiben $B_\varrho(a)$, so dass $B_{2\varrho}(a) \subset U$. Da V relativ kompakt ist, genügen endlich viele von ihnen. Seien $a_1,\dots,a_n$ die Mittelpunkte und $\varrho_1,\dots,\varrho_n$ die Radien. Wähle natürliche Zahlen $m_1,\dots,m_n$. Sei $A(m_1,\dots,m_n)$ der Untervektorraum von $L^2(U,\mathcal{O})$ der Funktionen f mit $\mathrm{ord}_{a_i} f \geq m_i$. Dieser Vektorraum ist abgeschlossen. Die Kodimension ist höchstens $n\sum m_i$, also endlich. Dann gilt

$$\|f\|_{B_{\varrho_i}(a_i)} \leq 2^{-m_i-1}\|f\|_{L^2(B_{2\varrho}(a_i))} \leq \|f\|_{L^2(U)}.$$

Durch Aufsummieren erhalten wir für $f \in \mathcal{O}(U)$ mit $\mathrm{ord}_{a_i} f \geq m_i$

$$\|f\|_{L^2(V)} \leq \sum \|f\|_{L^2(B_{\varrho_i}(a_i))} \leq \sum 2^{-m_i-1}\|f\|_{L^2(U)}.$$

Wählt man die m_i genügend groß, so wird die Summe kleiner als ε. □

Wir gehen nun zu Koketten auf einer Riemannschen Fläche X über.

Definition 6.10. *Es seien (U_i^*, z_i) für $i = 1, \dots, n$ Karten, nicht notwendig $X = \bigcup U_i$. Sei $z_i(U_i) = B_{r_i}(a_i) \subset \mathbb{C}$ Kreisscheibe. Seien $U_i \subset U_i^*$ offene Teilmengen. Wir schreiben $\mathfrak{U} < \mathfrak{U}^*$. Wir schreiben $\mathfrak{V} \ll \mathfrak{U}$, wenn jedes $V_i \Subset U_i$.*

(i) Für $f = (f_i) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ sei

$$\|f\|_{L^2(\mathfrak{U})} = \sqrt{\sum_i \|f_i\|^2_{L^2(U_i)}}$$

(ii) Für $g = (g_{ij}) \in C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ sei

$$\|g\|_{L^2(\mathfrak{U})} = \sqrt{\sum_{i,j} \|g_{ij}\|^2_{L^2(U_i \cap U_j)}}$$

wobei die L^2-Norm auf $U_i \cap U_j$ bezüglich z_i berechnet wird.

Für $n = 0, 1$ sei $C^n_{L^2}(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ jeweils der Raum der Koketten mit endlicher Norm und $Z^n_{L^2}(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ der Raum der Kozykel mit endlicher Norm.

Bemerkung. Die Randabbildung δ^0 ist stetig, falls $\mathfrak{U} \ll \mathfrak{U}^*$. Insbesondere ist dann $Z^1_{L^2}(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ ein abgeschlossener Unterraum.

Beweis: Zu zeigen ist die Stetigkeit d.h. Beschränktheit der Einschränkungsabbildungen. Für $L^2(U_i, \mathcal{O}) \to L^2(U_i \cap U_j, \mathcal{O})$ ist dies offensichtlich. Für $L^2(U_j, \mathcal{O}) \to L^2(U_i \cap U_j, \mathcal{O})$ gehen wir von der Norm bezüglich U_j^* zu der Norm bezüglich U_i^* über. Diese Norm kann abgeschätzt werden gegen das Supremum der Kartenwechselabbildung auf $U_i \cap U_j$. Dieses ist endlich, wenn $U_i \cap U_j \Subset U_i^* \cap U_j^*$. □

Korollar 6.11. *Sei $\mathfrak{V} \ll \mathfrak{U} \ll \mathfrak{U}^*$.*

(i) Für $f \in C^n_{L^2}(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ ist $f|_{\mathfrak{V}} \in C^n_{L^2}(\mathfrak{V}, \mathcal{O})$.

(ii) Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es einen abgeschlossenen Untervektorraum $A_\varepsilon \subset Z^1_{L^2}(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ von endlicher Kodimension, so dass

$$\|f\|_{L^2(\mathfrak{V})} \leq \varepsilon \|f\|_{L^2(\mathfrak{U})}.$$

für alle $f \in A_\varepsilon$.

Beweis: Die erste Aussage ist klar. Für die zweite wenden wir die Endlichkeitssaussage aus Lemma 6.9 an auf jedes der endlich vielen $L^2(U_i \cap U_j, \mathcal{O})$. Wir erhalten einen abgeschlossenen Unterraum von endlicher Kodimension in $C^n_{L^2}(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ und schneiden mit dem abgeschlossenen Teilraum der Zykel. □

Lemma 6.12. *Sei X, $\mathfrak{W} \ll \mathfrak{V} \ll \mathfrak{U} < \mathfrak{U}^*$ wie oben. Dann gibt es ein $C > 0$, so dass es für alle $\xi \in Z^1_{L^2}(\mathfrak{V}, \mathcal{O})$ ein $\zeta \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ und $\eta \in C^0_{L^2}(\mathfrak{W}, \mathcal{O})$ gibt mit*

$$\zeta = \xi + \delta^0 \eta$$

und

$$\max(\|\zeta\|_{L^2(\mathfrak{U})}, \|\eta\|_{L^2(\mathfrak{W})}) \le C\|\xi\|_{L^2(\mathfrak{V})}.$$

Nach Einschränken auf $\mathfrak{W}$ hat f, modulo Ränder auf $\mathfrak{W}$, eine Fortsetzung nach $\mathfrak{U}$.

Beweis: Sei $\xi = (f_{ij}) \in Z^1_{L^2}(\mathfrak{V}, \mathcal{O})$. Wir konstruieren g und h. Wir fassen f als Kokette mit Koeffizienten in $\mathcal{E}$ auf. Es gilt $H^1(\mathfrak{V}, \mathcal{E}) = 0$, also gibt es eine Kokette

$$g = (g_i) \in Z^0(\mathfrak{V}, \mathcal{E})$$

mit $\delta^0 g = f$, d.h.

$$f_{ij} = g_j - g_i \in \mathcal{E}(V_i \cap V_j).$$

Da $\overline{\partial} f_{ij} = 0$, folgt $\overline{\partial} g_j = \overline{\partial} g_i$ auf $V_i \cap V_j$, d.h. das Tupel der $\overline{\partial} g_i$ definiert einen Schnitt

$$\omega \in \mathcal{E}^{0,1}(\bigcup V_i).$$

Da $\bigcup_i W_i \Subset \bigcup_i V_i$, gibt es eine Funktion $\psi \in \mathcal{E}(X)$, die auf $\bigcup_i W_i$ den Wert 1 hat und außerhalb von $\bigcup_i V_i$ den Wert 0. Wir können daher $\psi\omega$ als Element von $\mathcal{E}^{0,1}(X)$ auffassen. Wir wenden das Dolbeaultsche Lemma an auf die Kreisscheibe U_i^* und die Form $\psi\omega$. Es gibt also $h_i \in \mathcal{E}(U_i^*)$ mit

$$\overline{\partial} h_i = \psi\omega.$$

Auf $U_i^* \cap U_j^*$ gilt $\overline{\partial} h_i = \overline{\partial} h_j$, also ist

$$F_{ij} = h_j - h_i \in \mathcal{O}(U_i^* \cap U_j^*).$$

Wir setzen

$$\zeta = (F_{ij}|_{U_i \cap U_j}) \in C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}).$$

Die Kozykelbedingung folgt da $\zeta = \delta^0 h \in C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{E})$. Die L^2-Bedingung ist erfüllt, da F_{ij} auf der kompakten Menge $\overline{U}_i$ holomorph ist. Wir haben also ein Element von $Z^1_{L^2}(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$. Auf der kleineren Menge W_i gilt

$$\overline{\partial} h_i = \psi\omega = \omega = \overline{\partial} g_i$$

also ist $h_i - g_i$ holomorph. Beide Summanden sind beschränkt auf der kompakten Menge $\overline{W}_i \subset V_i$, also

$$\eta = (h_i - g_i) \in C^0_{L^2}(\mathfrak{W}, \mathcal{O}).$$

Es ist

$$F_{ij} - f_{ij} = h_j - h_i - g_j + g_i = (h_j - g_j) - (h_i - g_i) = \delta^0 \eta_{ij}$$

also wie gewünscht

$$\zeta = \xi + \delta^0 \eta.$$

Es bleibt noch, die behauptete Abschätzung zu zeigen. Wir arbeiten in dem Hilbertraumsumme

$$H = Z^1_{L^2}(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) \times Z^1(\mathfrak{V}, \mathcal{O}) \times C^0(\mathfrak{W}, \mathcal{O})$$

mit der Norm

$$\|(\zeta, \xi, \eta)\|_H = \sqrt{\|\zeta\|^2 + \|\xi\|^2 + \|\eta\|^2}.$$

Darin sei

$$L = \{(\zeta, \xi, \eta) | \zeta = \xi + \delta^0 \eta\}.$$

Diese ist abgeschlossen, also selbst ein Hilbertraum. Wir haben gezeigt, dass die Projektionsabbildung

$$L \to Z^1_{L^2}(\mathfrak{V}, \mathcal{O})$$

surjektiv ist. Nach dem Satz von Banach ist die Abbildung offen, d.h. das Bild der offene Kugel $\|x\|_L < 1$ enthält eine offene Kugel $\|\xi\| < \varepsilon$. Sei ξ beliebig. Dann liegt

$$\xi' = \frac{\varepsilon}{2\|\xi\|}\xi$$

in der Kugel mit Radius 1 und hat ein Urbild x' mit $\|x'\|_L < 1$. Dann ist

$$x = \frac{2\|\xi\|}{\varepsilon} x'$$

ein Urbild von ξ mit

$$\|x\| < \frac{2}{\varepsilon}\|\xi\|$$

Die Zahl $C = 2/\varepsilon$ hat die gewünschte Eigenschaft. □

Lemma 6.13. *In der Situation des letzten Lemmas gibt es einen endlich-dimensionalen Teilraum $S \subset Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$, so dass gilt: für jedes $\xi \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ gibt es $\sigma \in S$ und $\eta \in C^0(\mathfrak{W}, \mathcal{O})$ mit*

$$\sigma = \xi + \delta^0 \eta.$$

Das Bild von $H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) \to H^1(\mathfrak{V}, \mathcal{O})$ ist endlich-dimensional.

Bemerkung. Die Aussage dieses Lemmas enthält keine Aussagen über L^2-Bedingungen.

Beweis: Sei C die Konstante des letzten Lemmas, $\varepsilon = (2C)^{-1}$. Es gibt einen abgeschlossenen Untervektorraum $A \subset Z^1_{L^2}(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ von endlicher Kodimension, so dass

$$\|\xi\|_{L^2(\mathfrak{V})} \le \varepsilon \|\xi\|_{L^2(\mathfrak{U})}$$

für alle $\xi \in A$. Sei S das orthogonale Komplement von A in $Z^1_{L^2}(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$.

Sei $\xi \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$. Wegen $\mathfrak{V} \ll \mathfrak{U}$ ist $\|\xi\|_{L^2(\mathfrak{V})} =: M < \infty$. Wie im letzten Lemma gibt es $\zeta_0 \in Z^1_{L^2}(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ und $\eta_0 \in C^0_{L^2}(\mathfrak{W}, \mathcal{O})$ mit

$$\zeta_0 = \xi + \delta^0\eta_0 \in Z^1_{L^2}(\mathfrak{W}, \mathcal{O})$$

und

$$\|\zeta_0\|_{L^2(\mathfrak{U})} \leq CM, \|\eta\|_{L^2(\mathfrak{W})} \leq CM.$$

Wir zerlegen

$$\zeta_0 = \xi_0 + \sigma_0, \quad \xi_0 \in A, \sigma_0 \in S$$

Nun wird das Verfahren induktiv wiederholt. Wir erhalten Folgen $\zeta_i, \xi_i, \sigma_i, \eta_i$ mit

$$\zeta_i \in Z^1_{L^2}(\mathfrak{U}, \mathcal{O}), \xi_i \in A, \sigma_i \in S, \eta_i \in C^0_{L^2}(\mathfrak{W}, \mathcal{O})$$

und

(i) $\zeta_i = \xi_{i-1} + \delta^0\zeta_i$ über $\mathfrak{W}$

(ii) $\zeta_i = \xi_i + \sigma_i$

(iii) $\|\zeta_i\|_{L^2(\mathfrak{W})} \leq 2^{-i}CM$, $\|\eta_i\|_{L^2(\mathfrak{W})}$

Interessant ist die Abschätzung: Da $\zeta_i = \xi_i + \sigma_i$ eine orthogonale Zerlegung ist, gilt

$$\|\xi_i\|_{L^2(\mathfrak{U})} \leq \|\zeta_i\|_{L^2(\mathfrak{U})} \leq 2^{-i}CM$$

und daher

$$\|\xi_i\|_{L^2(\mathfrak{W})} \leq \varepsilon\|\xi_i\|_{L^2(\mathfrak{U})} \leq 2^{-i-1}M$$

Nach dem letzten Lemma gibt es ζ_{i+1} auf $\mathfrak{U}$ und ζ_{i+1} auf $\mathfrak{W}$ mit

$$\zeta_{i+1} = \xi_i + \delta^0\eta_{i+1}$$

und

$$\|\zeta_{i+1}\|_{L^2(\mathfrak{U})}, \|\eta_{i+1}\|_{L^2(\mathfrak{W})} \leq 2^{-i-1}CM$$

Durch Aussummieren erhalten wir

$$\xi_k + \sum_{i=0}^{k} \sigma_i = \xi + \delta^0(\sum_{i=0}^{k} \eta_i)$$

auf $\mathfrak{W}$. Wegen unserer Abschätzungen gilt $\lim \xi_k = 0$ und die beiden Reihen konvergieren in den vollständigen Räumen S bzw. $C^0_{L^2}(\mathfrak{W}, \mathcal{O})$. Sei

$$\sigma = \sum_{i=0}^{\infty} \sigma_i \in S, \eta = \sum_{i=0}^{\infty} \in C^0_{L^2}(\mathfrak{W}, \mathcal{O})$$

Im Grenzwert erhalten wir die gewünschte Gleichung. $\square$

Beweis von Theorem6.3. Sei $Y_1 \Subset Y_2 \subset X$. Wir wählen ein Indexsystem I und für $i \in I$ offene Mengen

$$W_i \Subset V_i \Subset U_i \Subset U_i^*$$

, wobei die U_i^* Karten sind, alle Mengen offene Kreisscheiben in U_i^* und

$$Y_1 \subset \bigcup W_i \subset \bigcup U_i \subset Y_2$$

Da Y_1 relative kompakt ist, kann I endlich gewählt werden. Dann hat die Beschränkungsabbildung

$$H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) \to H^1(\mathfrak{V}, \mathcal{O})$$

endlich-dimensionales Bild. Es gilt $H^1(V_i, \mathcal{O}) = H^1(U_i, \mathcal{O}) = 0$, da es sich um Kreisscheiben handelt. Nach dem Lemma von Leray gilt dann

$$H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) = H^1(\bigcup U_i, \mathcal{O}), \quad H^1(\mathfrak{V}, \mathcal{O}) = H^1(\bigcup V_i, \mathcal{O}).$$

In der Komposition

$$H^1(Y_2, \mathcal{O}) \to H^1(\bigcup U_i, \mathcal{O}) \to H^1(\bigcup V_i, \mathcal{O}) \to H^1(Y_1, \mathcal{O})$$

hat dann die mittlere Abbildung endlich-dimensionales Bild, also auch die gesamte Abbildung. □

Folgerungen

Wir haben damit den Beweis von Theorem 3.13 beendet: Ist X eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht $g = \dim H^1(X, \mathcal{O})$, D ein Divisor, so sind $l(D) = \dim \mathcal{O}_D(X)$ und $h^1(D) = \dim H^1(X, \mathcal{O}_D)$ endlich, und es gilt

$$l(D) - h^1(D) = 1 - g + \deg(D).$$

Insbesondere gilt immer

$$l(D) \geq 1 - g + \deg(D).$$

Für große D wir die linke Seite also größer als 1 und daher:

Korollar 6.14. *Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche. Dann existiert eine nicht-konstante meromorphe Funktion auf X. In anderen Worten: X ist eine Überlagerung von $\hat{\mathbb{C}}$. Diese kann von Grad $g + 1$ gewählt werden.*

Wir können z.B. $D = (g+1)P$ wählen für einen beliebigen Punkt $P \in X$. Dann hat die meromorphe Funktion nur Pole in P.

Korollar 6.15. *Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche, $P \in X$. Dann ist $X \setminus \{P\}$ eine eigentliche Überlagerung von $\mathbb{C}$.*

Korollar 6.16. *Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht* 0. *Dann ist $X \cong \hat{\mathbb{C}}$.*

Beweis: Wir haben die Existenz einer $g+1$-fachen Überlagerung von $\hat{\mathbb{C}}$ gezeigt.Im Fall $g = 0$ ist dies also eine einfach Überlagerung. Diese ist automatisch bijektiv und dann auch biholomorph. □

Ist $f \in \mathcal{M}(X)$, so ist $\mathrm{d}f$ eine globale meromorphe Differentialform ungleich 0. Zusammen mit Lemma 2.15 folgt also:

Korollar 6.17. *Die Menge der meromorphen Differentialformen auf X ist ein $\mathcal{M}(X)$-Vektorraum der Dimension* 1*.*

In Definition 2.16 haben wir den *kanonischen Divisor K* als Divisor einer meromorphen Differentialform definiert. Je zwei kanonische Divisoren sind äquivalent, d.h. sie definieren nach Satz 3.8 dasselbe Geradenbündel. In dem nachfolgenden Beispiel hatten wir gezeigt, dass

$$\Omega \cong \mathcal{O}_K.$$

Korollar 6.18. *Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche. Dann sind $\Omega(X)$ und $H^1(X, \Omega)$ endlich-dimensional.*

Was uns noch fehlt

Serre-Vanishing: Für genügend positive D gilt

$$H^1(X, \mathcal{O}_D) = 0$$

bzw.

$$l(D) = 1 - g + \deg(D)$$

Eng verwandt ist die Aussage

$$\dim H^1(X, \Omega) = 1$$

und **Serre-Dualität**: Die natürliche bilineare Abbildung

$$\mathcal{O}_D(X) \times H^1(X, \mathcal{O}_{K-D}) \to H^1(X, \Omega) \cong \mathbb{C}$$

induziert einen Isomorphismus

$$\mathcal{O}_D(X) \cong H^1(X, \mathcal{O}_{K-D})^*.$$

Um letztere einzuordnen betrachten wir die Sequenz

$$0 \to \mathbb{C} \to \mathcal{O} \to \Omega \to 0.$$

Sie induziert eine lange exakte Sequenz

$$0 \to \mathbb{C} \to \mathbb{C} \to \Omega(X) \to H^1(X, \mathbb{C}) \to H^1(X, \mathcal{O}) \to H^1(X, \Omega) \to H^2(X, \mathbb{C}) \to 0$$

Mit etwas Kenntnis in algebraischer Topologie erhalten wir $H^2(X,\mathbb{C}) = \mathbb{C}$, da X kompakt. D.h. die Behauptung ist äquivalent dazu, dass die Sequenzen

$$0 \to \Omega(X) \to H^1(X,\mathbb{C}) \to H^1(X,\mathcal{O}) \to 0$$

exakt ist. Wir sagen: **die Hodge-Spektralsequenz degeneriert**. Wegen $g = \dim \Omega(X) = \dim H^1(X,\mathcal{O})$ ist dann $2g = \dim H^1(X,\mathbb{C})$. Eine völlig analoge Zerlegung erhält man für antiholomorphe Funktionen und Differentialformen. Es folgt dann leicht die **Hodge-Zerlegung**:

$$\Omega(X) \oplus \overline{\Omega}(X) \to H^1(X,\mathbb{C})$$

ist ein Isomorphismus. Beide Seiten haben nämlich die gleiche Dimension und eine Differentialform kann nicht gleichzeitig holomorph und antiholomorph sein. Wir werden dies in der Form zeigen: jede Kohomologieklasse hat einen eindeutigen harmonischen Repräsentanten.

Alle diese Sätze haben Verallgemeinerung auf höher-dimensionale *kompakte Kähler-Mannigfaltigkeiten*, d.h. kompakte komplexe Mannigfaltigkeiten, für die es eine geschlossene globale reelle 2-Form mit gewissen Eigenschaften gibt. Insbesondere definiert sie eine Riemannsche Metrik.

Kapitel 7

Serre-Dualität

Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche. Wir haben bereits gesehen, dass aus der Dolbeault-Sequenz

$$0 \to \Omega \to \mathcal{E}^{1,0} \xrightarrow{d} \mathcal{E}^(2) \to 0$$

folgt, dass

$$H^1(X, \Omega) \cong \mathcal{E}^{(2)}(X)/d\mathcal{E}^{1,0}(X).$$

Sei $\xi = [\omega]$ mit $\omega \in \mathcal{E}^{(2)}$.

Definition 7.1. *Wir definieren die* Residuenabbildung

$$\mathrm{Res} : H^1(X, \Omega) \to \mathbb{C}$$

für $\xi = [\omega]$ *mit* $\omega \in \mathcal{E}^{(2)}$ *durch*

$$\mathrm{Res}(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_X \omega.$$

Das Integral ist endlich, da X kompakt ist. Das Residuum ist wohldefiniert, da für $\omega = d\phi$ nach dem Satz von Stokes

$$\int_X \omega = \int_{\partial X} \phi = 0$$

da X keinen Rand hat.

Das Residuum kann auch direkt in Termen von Koketten beschrieben werden. Wir schreiben $\mathcal{M}^{(1)}$ für die Garbe der meromorphen Differentialformen.

Definition 7.2. *Sei* $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ *offene Überdeckung von* X. *Sei* $\phi \in Z^1(\mathcal{U}, \Omega)$. *Eine* Mittag-Leffler-Verteilung *zu* ϕ *ist eine Kokette* $\omega \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{M}^{(1)})$ *mit* $\partial\omega = \phi$.

Sei $a \in X$. *Das* Residuum *von* ω *in* a *ist definiert als*

$$\mathrm{res}_a(\omega) = \mathrm{res}_a \omega_i$$

für i *mit* $a \in U_i$.

Das Residuum ist wohldefiniert, denn ist $a \in U_i \cap U_j$, so ist $\omega_i - \omega_j$ holomorph in a und daher $\mathrm{res}_a\omega_i = \mathrm{res}_a\omega_j$.

Satz 7.3. *Sei X kompakt. Sei ω Mittag-Leffler-Verteilung von $\phi = \partial\omega$. Dann ist* $\mathrm{res}_a\omega$ *nur in endlich vielen Punkten ungleich* 0. *Weiter gilt*

$$\mathrm{Res}(\phi) = \sum_{a \in X} \mathrm{res}_a\omega.$$

Beweis: Angenommen, es gibt unendlich viele $a \in X$, in denen ω nicht holomorph ist. Da X kompakt ist, hat diese Folge einen Häufungspunkt. Dieser ist in einem U_i enthalten. Dann ist die Menge der Singularitäten von ω_i nicht isoliert. Dies ist eine Widerspruch zur Definition von Meromorphie.

Wir bestimmen die Differentialform in $\mathcal{E}^{(2)}(X)$, die zu ϕ gehört. Dafür gehen die die Konstruktion aus dem Beweis für die Exaktheit der Kohomologiesequenz durch. Es ist

$$\phi \in Z^1(\mathcal{U}, \Omega) \subset Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{E}^{1,0}).$$

Wegen $H^1(X, \mathcal{E}^{1,0})$ kann der Kozykel berandet werden, d.h. es gibt

$$\sigma \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{E}^{1,0})$$

mit

$$\phi_{ij} = \sigma_j - \sigma_i = \omega_j - \omega_i \in \mathcal{E}^{1,0}(U_i \cap U_j).$$

Da ϕ holomorph ist, folgt

$$d\phi = \overline{\partial}\phi = 0 \Rightarrow d\sigma_i = d\sigma_j$$

Daher ist $\psi = d\sigma_i$ eine globale Form, nämlich der gesuchte Repräsentant. Seien $a_1, \ldots, a_n$ die Pole von ω, $X' = X \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$. Wir berechnen

$$2\pi i \mathrm{Res}(\phi) = \int_X \psi = \int_{X'} \psi.$$

Auf $X' \cap U_i \cap U_j$ ist

$$\sigma_i - \omega_i = \sigma_j - \omega_j$$

und definiert eine globale Form $\sigma \in \mathcal{E}^{1,0}(X')$ mit $d\sigma = \psi$. Wir wollen den Satz von Stokes anwenden. Dafür legen wir um jedes a_k einen Kreis von Radius ε. Genauer: wir fixieren eine Koordinatenumgebung bei a_k und wählen $B_\varepsilon(a_k) \subset X$ als homöomorphes Bild einer solchen Kreisscheibe. Wir wählen ε so klein, dass sich diese Scheiben nicht überschneiden und dass sie jeweils in einem U_i liegen. Sei $X_\varepsilon = X \setminus \bigcup_k B_\varepsilon(a_k)$. Dann ist

$$2\pi i \mathrm{Res}(\phi) = \int_X' d\sigma = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{X_\varepsilon} d\sigma = \int_{\partial X_\varepsilon} \sigma.$$

Der Rand zerfällt in (negativ orientierte!) Kreislinien um die Pole. Es ist

$$\int_{\partial B_\varepsilon} \sigma = \int_{\partial B_\varepsilon} (\sigma_i - \omega_i).$$

Das Integral über σ_i verschwindet im Grenzwert $\varepsilon \to 0$, da $d\sigma_i = \psi$ in der ganzen Kreisscheibe stetig ist. Das Integral über ω_i liefert $2\pi i \mathrm{res}_{a_k}\omega_i$, unabhängig von ε. Zusammen ist die Behauptung. □

Beispiel. Sei $X = \hat{\mathbb{C}}$. Wir haben bereits früher gezeigt, dass $H^1(\hat{\mathbb{C}}, \Omega)$ Wir arbeiten wieder mit der Standard-Überdeckung $\mathbb{C}, \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$. Wir definieren $\omega_1 = dz/z$ auf $\mathbb{C}$ und $\omega_2 = 0$ auf $\hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$. Dies ist eine Mittag-Leffler-Verteilung, da $\omega_1 - \omega_2$ holomorph ist. Das Residuum ist nach dem Satz 1, also lässt sich dieser Kozykel nicht beranden.

Wir werden sehen, dass Res für jede kompakte Riemannsche Fläche ein Isomorphismus ist. Diese Aussage ist aber eine Konsequenz eines allgemeineren Sachverhaltes.

Definition 7.4. *Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche mit kanonischem Divisor K, D ein Divisor. Das Produkt*

$$\mathcal{O}_{K-D} \times \mathcal{O}_D \to \mathcal{O}_K = \Omega$$

induziert eine Paarung

$$H^0(X, \mathcal{O}_{K-D}) \times H^1(X, \mathcal{O}_D) \to H^1(X, \Omega) \xrightarrow{\mathrm{Res}} \mathbb{C}$$

oder äquivalent eine lineare Abbildung

$$\iota_D : H^0(X, \mathcal{O}_{K-D}) \to H^1(X, \mathcal{O}_D)^*$$

in den dualen Vektorraum.

Theorem 7.5 (Serre-Dualität)**.** *Die Dualitätspaarung ist perfekt, d.h ι_D ist ein Isomorphismus.*

Korollar 7.6.

$$\dim H^1(X, \mathcal{O}_D) = l(D - K).$$

Damit ist der Beweis von Theorem 3.11 (Riemann-Roch) abgeschlossen:

$$l(D) - l(K - D) = 1 - g + \deg(D).$$

Korollar 7.7. *Es gilt $l(K) = \dim \Omega(X) = g$ und $\dim H^1(X, \Omega) = 1$. Das Residuum ist ein Isomorphismus.*

Beweis: Die erste Formel folgt für $D = 0$ aus Riemann-Roch. Die zweite ist der Spezialfall $D = K$ des Korollars. Die Residuums-Abbildungs muss dann entweder ein Isomorphismus sein oder die Null-Abbildung. Letzteres ist wegen Serre-Dualität nicht möglich. □

Satz 7.8. *Die Dualitätsabbildung ι_D ist injektiv.*

Beweis: Sei $\omega \in H^0(X, \mathcal{O}_{K-D})$, $\omega \neq 0$. Wir suchen ein $\xi \in H^1(X, \mathcal{O}_D)$ mit $\langle \omega, \xi \rangle \neq 0$. Sei $a \in X$ ein Punkt mit $D(a) = 0$, (U_0, z) eine Koordinatenumgebung von a mit $z(a) = 0$, $D|_{U_0} = 0$. In U_0 schreibt sich $\omega = f\mathrm{d}z$ mit $f \in \mathcal{O}(U_0)$. Wir wählen U_0 so klein, dass f nullstellenfrei in U_0 ist. Wir setzen $U_1 = X \setminus \{a\}$ und $\mathcal{U} = (U_0, U_1)$. Sei $\eta = (f_0, f_1) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{M})$ mit $f_0 = (zf)^{-1}$, $f_1 = 0$. Dann ist

$$\eta\omega = \left(\frac{\mathrm{d}z}{z}, 0\right) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{M}^{(1)})$$

eine Mittag-Leffler-Verteilung mit

$$\mathrm{Res}(\omega\eta) = 1.$$

Es gilt $\partial\eta = Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_D)$ (denn auf $U_0 \cap U_1 = U_0 \setminus \{a\}$ ist $D = 0$ und $f_1 - f_0 = (zf)^{-1}$ holomorph). Sei ξ die zugehörige Kohomologieklasse. Wir berechnen die Paarung

$$\langle \omega, \xi \rangle = \mathrm{Res}(\omega\xi) = \mathrm{Res}(\partial(\omega\eta)) = 1.$$

□

Wir vergleichen nun verschiedene Divisoren. Sei $D' \leq D$, also $\mathcal{O}_{D'} \subset \mathcal{O}_D$ und $\mathcal{O}_{K-D} \subset \mathcal{O}_{K-D'}$. Mit der langen exakten Kohomologiesequenz haben wir gezeigt, dass dann

$$H^1(X, \mathcal{O}_{D'}) \to H^1(X, \mathcal{O}_D) \to 0$$

und daher

$$0 \to H^1(X, \mathcal{O}_D)^* \to H^1(X, \mathcal{O}_{D'})^*.$$

Andererseits ist

$$0 \to H^0(X, \mathcal{O}_{K-D}) \to H^0(X, \mathcal{O}_{K-D'})$$

Es ist leicht zu sehen, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & H^1(X, \mathcal{O}_D)^* & \longrightarrow & H^1(X, \mathcal{O}_{D'})^* \\ & & {\scriptstyle\iota_D}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\iota_{D'}} \\ 0 & \longrightarrow & H^0(X, \mathcal{O}_{K-D}) & \longrightarrow & H^0(X, \mathcal{O}_{K-D'}) \end{array}$$

kommutiert.

Lemma 7.9. *Das obige Diagramm ist kartesisch, d.h.*

$$H^0(X, \mathcal{O}_{K-D}) = H^0(X, \mathcal{O}_{K-D'}) \cap H^1(X, \mathcal{O}_D)^* \subset H^1(X, \mathcal{O}_{D'})^*.$$

Beweis: Sei $\lambda \in H^1(X, \mathcal{O}_D)^*$, $\omega \in H^0(X, \mathcal{O}_{K-D'})$ mit selbem Bild in $H^1(X, \mathcal{O}^*_{D'}$. Zu zeigen ist, dass ω bereits in $H^0(X, \mathcal{O}_{K-D})$ liegt.

Angenommen, ω liegt nicht in $H^0(X, \mathcal{O}_{K-D})$. Dann gibt $a \in X$ mit $\mathrm{ord}_a\omega < D(a)$. Wir wählen wieder eine Koordinatenumgebung (U_0, z) mit $z(a) = 0$. In U_0 schreiben wir $\omega = f\mathrm{d}z$ mit $f \in \mathcal{M}(U_0)$. Wir wählen U_0 so klein, dass auf $U_0 \setminus \{a\}$ $D = 0$, $D' = 0$ und f null- und polstellenfrei. Wir setzen $U_1 = X \setminus \{a\}$,

$\mathcal{U} = (U_0, U_1)$. Sei $\eta = (f_0, f_1) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{M})$ mit $f_0 = (zf)^{-1}$, $f_1 = 0$. Wegen $\mathrm{ord}_a\omega < D(a)$ gilt sogar $\eta \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}_D)$. Es ist dann

$$\partial\eta \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}) \cap Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_D) \cap Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{D'})$$

Wir bezeichnen die Klasse in $H^1(X, \mathcal{O}_D)$ mit ξ, die in $H^1(X, \mathcal{O}_{D'})$ mit ξ'. Nach Konstruktion ist $\xi = 0$. Andererseits gilt

$$\langle \omega, \xi' \rangle = \mathrm{Res}(\omega\eta) = \mathrm{Res}\left(\frac{\mathrm{d}z}{z}, 0\right) = 1.$$

Dies ist ein Widerspruch. $\square$

Ist B ein weiterer Divisor und $f \in H^0(X, \mathcal{O}_B)$, so definiert Multiplikation mit f einen Garbenhomomorphismus

$$\mathcal{O}_{D-B} \to \mathcal{O}_D.$$

Diese induziert Abbildungen auf Kohomologie.

Lemma 7.10. *Ist* $f \in H^0(X, \mathcal{O}_B)$ *nicht* 0*, so ist*

$$f^* : H^1(X, \mathcal{O}_D)^* \to H^1(X, \mathcal{O}_{D-B})^*$$

injektiv.

Beweis: Sei $A = (f) \geq -B$. Dann faktorisiert die Garbenhomomorphismus

$$\mathcal{O}_{D-B} \to \mathcal{O}_{D+A} \to \mathcal{O}_D.$$

Die erste Abbildung induziert wie oben bemerkt eine surjektive Abbildung auf H^1 und eine injektive auf dem Dualraum. Die zweite ist ein Garbenisomorphismus, induziert also einen Isomorphismus auf Kohomologie. $\square$

Beweis von Theorem 7.5. Wir müssen die Surjektivität von ι_D zeigen. Sei $\lambda \in H^1(X, \mathcal{O}_D)^*$. Sei P eine Divisor von Grad 1. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir

$$D_n = D - nP$$

Wir definieren

$$\phi_n : H^0(X, \mathcal{O}_{nP} \to H^1(X, \mathcal{O}_{D_n})^*$$

wobei $\psi \in H^0(X, \mathcal{O}_{nP})$ die Linearform

$$(g_{ij})_{i,j} \mapsto \lambda(\psi g_{ij})$$

für $\psi \in H^0(X, \mathcal{O}_{nP})$. (Es ist dann $(g_{ij}) \geq -D+nP$, $\psi \geq -nP$, also $(\psi g_{ij}) \geq -D$ und λ kann angewendet werden). Mit anderen Worten:

$$\phi_n(\psi) = \psi^*(\lambda)$$

mit ψ^* wie im letzten Lemma. Sei ψ ein Element des Kerns von ϕ_n. Ist $\psi \neq 0$, so folgt nach dem Lemma aus $\psi^*\lambda = 0$ bereits $\lambda = 0$, im Widerspruch zu unserer Wahl. Die Abbildung ϕ_n ist also injektiv. Wir bestimmen die Dimension des Bildes. Sie ist nach Riemann-Roch

$$\dim \operatorname{Im}(\phi_n) = \dim H^0(X, \mathcal{O}_{nP}) \geq 1 - g + nP$$

Ebenfalls nach Riemann-Roch

$$\dim \operatorname{Im}(\iota_{D_n}) = \dim H^0(X, \mathcal{O}_{K-D_n}) \geq 1 - g + \deg(K - D) + n$$

Und schließlich für den Raum, in dem sich alles abspielt:

$$\dim H^1(X, \mathcal{O}_{D_n})^* = g - 1 - \deg(D_n) = g - 1 - \deg(D) + n$$

sobald n genügend groß, so dass $\deg D_n < 0$ und $l(D_n) = 0$. Für genügend großes n folgt also

$$\dim \operatorname{Im}(\phi_n) + \dim \operatorname{Im}(\iota_{D_n}) > \dim H^1(X, \mathcal{O}_{D_n})^*$$

Daher haben die beiden Bilder einen nicht-trivialen Schnitt. Es gibt also $\psi \in H^0(X, \mathcal{O}_{nP})$ mit $\psi \neq 0$ und $\omega \in H^0(X, \mathcal{O}_{K-D_n})$ so dass

$$\phi_n(\psi) = \psi^*\lambda = \iota_{D_n}(\omega).$$

Sei $D' = D - (\psi)$. Dann ist $\omega' = \psi^{-1}\omega \in H^0(X, \mathcal{O}_{K-D'})$ und

$$\iota_{D'}(\omega') = \lambda \in H^1(X, \mathcal{O}_D)^*$$

Nach dem Lemma über das kartesische Diagramm liegt dann ω' bereits in $H^0(X, \mathcal{O}_{K_D})$ und wir haben unser Urbild gefunden. □

Korollar 7.11. *Sei X kompakte Riemannsche Fläche, K ein kanonischer Divisor. Dann gilt*

$$\deg K = 2g - 2.$$

Beweis: Nach Riemann-Roch für $D = K$ ergibt

$$l(K) - l(0) = 1 - g + \deg(K).$$

Wir wissen bereits, dass $l(K) = g$ und $l(0) = 1$. □

Dies bedeutet, dass wir das Geschlecht einfach auf dem Divisor einer meromorphen Differentialform ablesen können!

Beispiel. Sei $X = \mathbb{C}/\Lambda$ für ein Gitter Λ. Dann ist $\omega = \mathrm{d}z$ eine globare Differentialform, also $K = 0$. Es folgt

$$2g - 2 = 0 \Rightarrow g = 1.$$

Noch wichtiger ist $\omega = \mathrm{d}z$ auf $\hat{\mathbb{C}}$. Diese Differentialform hat in ∞ einen Pol der Ordnung 2, also gilt $g(\hat{\mathbb{C}}) = 1$.

In der algebraischen Topologie definiert man rein topologisch das Geschlecht einer kompakten Fläche. In den beiden obigen Spezialfällen stimmt dies mit dem funktionentheoretischen Geschlecht überein. Aus dem Fall $X = \hat{\mathbb{C}}$ folgt der Zusammenhang dann auch im allgemeinen. Dies ist eine weitere Konsequenz aus unserer Formel für das Geschlecht.

Wir betrachte Überlagerunge $f : X \to Y$ von kompakten Riemannschen Flächen. Wir haben bereits den *Abbildunggrad* $\deg(f)$ definiert, das ist die (konstante) Anzahl der Urbilder von $y \in Y$ (mit Vielfachheit). Für $x \in X$ ist $v(x, f)$ die lokale Vielfachheit. Der Punkt heißt *unverzweigt*, wenn $v(x, f) = 1$. Da X kompakt ist, sind nur endliche viele Punkte verzweigt. Wir nennen

$$b(f) = \sum_{x \in X} (v(x, f) - 1)$$

die *Gesamtverzweigungsordnung.*

Theorem 7.12 (Formel von Riemann-Hurwitz)**.** *Sei $f : X \to Y$ eine holomorphe Überlagerung vom Grad n zwischen kompakten Riemannschen Flächen. Sei b die Gesamtverzweigungsordnung. Dann gilt*

$$g(X) = \frac{b}{2} + n(g(Y) - 1) + 1.$$

Beweis: Sei $\omega \neq 0$ globale meromorphe Differentialform auf Y, $f^*\omega$ die zurueckgezogene Form auf X. (Wir werden dies gleich in lokalen Koordinaten ausschreiben). Dann gilt

$$\deg(\omega) = 2g(Y) - 2, \quad \deg(f^*\omega) = 2g(X) - 2$$

Wir werden verifizieren:

Behauptung. $\deg(f^*\omega) = b + n \deg(\omega)$.

Durch Einsetzen folgt das Theorem.

Wir gehen zu geeigneten lokalen Kooridinaten über. Sei $x \in X$, $y = f(x)$. Nach dem Satz von lokalen Gestalt gibt es Karten (U, z) bei x und (U', w) bei y mit $z(x) = 0$, $w(y) = 0$, so dass sich f in diesen Koordinaten als $w = z^k$ schreibt. In U' sei $\omega = \psi(w)\mathrm{d}w$. Dann gilt in U

$$f^*\omega = f^*(\psi(w)\mathrm{d}w) = \psi(z^k)\mathrm{d}z^k = kz^{k-1}\psi(z^k)\mathrm{d}z.$$

Hieraus lesen wir ab

$$\mathrm{ord}_x(f^*(\omega)) = (v(f, x) - 1) + v(f, x)\mathrm{ord}_y(\omega).$$

Durch Aussummieren über $x \in X$ erhalten die Behauptung. □

Beispiel.

- Speziell für $Y = \hat{\mathbb{C}}$ erhält man

$$g(X) = \frac{b}{2} - n + 1.$$

Im Fall $n = 1$ ist die Überlagerung überall unverzweigt, also auch $b = 0$ und $g(X) = 0$, wie erwartet.

- Ist $g(Y) = 1$ und f unverzweigt, so erhalten wir

$$g(X) = n(1-1) + 1 = 1.$$

Die einzigen unverzweigten Überlagerungen einer elliptischen Kurve sind selbst elliptisch.

- Ist $g(X) = 1$, so muss gelten

$$1 = \frac{b}{2} + n(g(Y) - 1) + 1.$$

Es gibt also zwei Fälle: $g(Y) = 0$, $b = 2n$ (meromorphe Funktionen) oder $g(Y) = 1$, $b = 0$, also unverzweigte Überlagerungen von elliptischen Kurven.

- Unverzweige Überlagerungen von elliptischen Kurven gibt es viele. Man erhält sie z.B. als $\mathbb{C}/\Lambda' \to \mathbb{C}/\Lambda$, wenn $\Lambda' \subset \Lambda$ eine Untergruppe.

Korollar 7.13. *Das Geschlecht einer kompakten Riemannschen Fläche stimmt überein mit dem Geschlecht der Fläche im Sinne der algebraischen Topologie.*

Beweis: Die Aussage ist richtig über $\hat{\mathbb{C}}$. Jede kompakte Riemannsche Fläche ist Überlagerung von $\hat{\mathbb{C}}$. Die Riemann-Hurzwitz-Formel gilt ebenfalls für das Geschlecht in der algebraischen Topologie. □

Weitere Konsequenzen:

Satz 7.14. *Sei X kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht g, D ein Divisor auf X. Falls* $\deg(D) > 2g - 2$, *so ist* $H^1(X, \mathcal{O}_D) = 0$ *und*

$$l(D) = 1 - g + \deg(D).$$

Beweis: Es ist $h^1(D) = l(K - D)$. Die Voraussetzung bedeutet $\deg(K - D) = 2g - 2 - \deg(D) < 0$. Wir haben bereits vorher gezeigt (Lemma 3.10), dass dann $l(K - D) = 0$. Die zweite Aussage ist Riemann-Roch in diesem Fall. □

Korollar 7.15. *Sei X kompakte Riemannsche Fläche. Dann gilt*

$$H^1(X, \mathcal{M}^{(1)}) = H^1(X, \mathcal{M}) = 0.$$

Beweis: Auf X gibt es eine nicht-triviale globale meromorphe Differentialform ω. Wir haben bereits früher gezeigt, dass dann $\mathcal{M}^{(1)} = \mathcal{M}\omega$. Es genügt also, Kohomologie mit Koeffizienten in $\mathcal{M}$ zu betrachten.

Sei $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X, $(f_{ij})_{i,j}$ ein Kozykel mit Werten in $\mathcal{M}$. Sei D_{ij} der Divisor von f_{ij}. Er ist lokal-endlich auf $U_i \cap U_j$. Nur Verfeinern der Überdeckung können wir erreichen, dass die Divisoren sogar endlich sich.

Dafür überdecken wir jedes U_i durch relativ-kompakte $V_\alpha \subset U_{\tau(\alpha)}$. Dann ist $V_\alpha \cap V_\beta$ relativ-kompakt in $U_{\tau(\alpha)} \cap U_{\tau(\beta)}$. Der Kozykel $\tau^*(f)$ hat auf $V_\alpha \cap V_\beta$ den Wert $f_{\tau(\alpha),\tau(\beta)}$. Da sich die meromorphe Funktion auf eine Umgebung des Abschlusses fortsetzt, ist ihr Divisor nicht nur lokal endlich, sondern sogar endlich.

Wir ersetzen f durch $\tau^* f$. Da X kompakt ist, kann die Überdeckung durch eine endliche Überdeckung verfeinert werden. Sei nun $D = \sum D_{ij}$. Dann ist f ein Koyzkel zu $\mathcal{O}_D$. Durch Vergrößern von D erreichen wir, dass $\deg(D) > 2g - 2$. Da $H^1(X, \mathcal{O}_D) = 0$ lässt sich unser Kozykel beranden. Wegen $\mathcal{O}_D \subset \mathcal{M}$ ist er dann auch 0 in $H^1(X, \mathcal{M})$. □

Korollar 7.16. *Sei X kompakte Riemannsche Fläche, $\mathfrak{U}$ eine offene Überdeckung. Sei $\phi \in Z^1(\mathfrak{U}, \Omega)$. Dann existiert eine Mittag-Leffler-Verteilung zu ϕ.*

Beweis: Das Bild von ϕ in $Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{M}^{(1)})$ kann lässt sich beranden. □

Kapitel 8

Die Hodge-Zerlegung

Wir betrachten weiter kompakte Riemannsche Fläche, rücken jetzt aber $H^i(X,\mathbb{C})$ in den Vordergrund.
Wir haben bereits gezeigt (Satz **??**), dass die Sequenz

$$0 \to \mathbb{C} \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}^{(1)} \to \mathcal{E}^{(2)} \to 0$$

exakt ist. Wir spalten sie auf in zwei Sequenzen

$$0 \to \mathbb{C} \to \mathcal{E} \to \mathcal{F} \to 0$$
$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{E}^{(1)} \to \mathcal{E}^{(2)} \to 0$$

Die zugehörigen langen exakten Kohomologiesequenzen ergeben (mit Satz **??**)

$$0 \to \mathbb{C} \to \mathcal{E}(X) \to \mathcal{F}(X) \to H^1(X,\mathbb{C}) \to 0$$
$$0 \to H^1(X,\mathcal{F}) \to H^2(X,\mathbb{C}) \to 0$$
$$0 \to \mathcal{F}(X) \to \mathcal{E}^{(1)}(X) \to \mathcal{E}^{(2)}(X) \to H^1(X,\mathcal{F}) \to 0$$

Dies setzen wir zusammen:

Satz 8.1. *Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche. Dann gilt*

$$H^i(X,\mathbb{C}) = \frac{\operatorname{Ker}\left(d^i : \mathcal{E}^{(i)}(X) \to \mathcal{E}^{(i+1)}\right)}{\operatorname{Im}\left(d^{i-1} : \mathcal{E}^{(i-1)}(X) \to \mathcal{E}^{(i)}(X)\right)}$$

Die reche Seite heißt auch *i-te de Rham Kohomologie von X*. Die Inklusion $\Omega \to \mathcal{E}$ induziert eine Abbildung $\Omega(X) \to H^1(X,\mathbb{C})$. Sie ist injektiv, wie wir aus der langen exakten Sequenz zu

$$0 \to \mathbb{C} \to \mathcal{O} \to \Omega \to 0$$

ablesen, denn sie beginnt

$$0 \to \mathbb{C} \to \mathcal{O}(X) \to \Omega(X) \to H^1(X,\mathbb{C}) \to$$

Genauso erhalten wir auch eine Inklusion von anti-holomorphen Formen.

Theorem 8.2 (Hodge-Zerlegung)**.** *Sei X kompakte Riemannsche Fläche. Dann ist*

$$\Omega(X) \oplus \overline{\Omega}(X) \to H^1(X, \mathbb{C})$$

ein Isomorphismus.

Korollar 8.3. *Es gilt* $\dim H^1(X, \mathbb{C}) = 2g$.

Beweis: Komplexe Konjugation definiert einen Isomorphismus $\Omega \to \overline{\Omega}$. □

Insbesondere haben wir damit bewiesen, dass das Geschlecht eine topologische Invariante ist.
Hier eine weitere Konsequenz: Die lange exakte Sequenz zu

$$0 \to \mathbb{C} \to \mathcal{O} \to \Omega \to 0$$

liefert

$$0 \to \Omega(X) \to H^1(X, \mathbb{C}) \to H^1(X, \mathcal{O}) \to H^1(X, \Omega) \to H^2(X, \mathbb{C}) \to 0$$

Korollar 8.4. *Die Abbildung $H^1(X, \mathbb{C}) \to H^1(X, \mathcal{O})$ ist surjektiv und $\mathbb{C} \cong H^1(X, \Omega) \cong H^2(X, \mathbb{C})$.*

Beweis: Wir wissen, dass $\dim H^1(X, \mathcal{O}) = g$. Wegen $\dim H^1(X, \mathbb{C}) = 2g$ muss die Abbildung surjektiv sein. □

Tatsächlich werden wir diese Aussagen (und noch etwas feinere) direkt beweisen. Wesentliches Hilfsmittel ist ein Skalarprodukt auf $\mathcal{E}^{(1)}(X)$.

Definition 8.5. *Sei X Riemannsche Fläche, $\omega = \omega_1 + \omega_2$ mit $\omega_1 \in \mathcal{E}^{1,0}(X)$, $\omega_2 \in \mathcal{E}^{0,1}(X)$. Wir definieren den* Hodge-Stern-Operator

$$*\omega = i(\overline{\omega}_1 - \overline{\omega_2}).$$

Dies ist ein $\mathbb{R}$-linearer Isormorphismus, der $\mathcal{E}^{0,1}(X)$ und $\mathcal{E}^{0,1}(X)$ vertauscht. Insbesondere ist

$$*dz = id\overline{z}, *d\overline{z} = -idz$$

Es gilt

(i) $*f\omega = \overline{f} * \omega$,

(ii) $* * \omega = -\omega$, $\overline{*\omega} = *\overline{\omega}$

(iii) $d * (\omega_1 + \omega_2) = i\partial\overline{omega}_1 - i\overline{\partial}\overline{\omega_2}$

(iv) $*\partial f = i\overline{\partial f}$, $*\overline{\partial} f = -i\partial\overline{f}$

(v) $d * df = 2i\partial\overline{\partial f}$

Definition 8.6. *Sei X kompakte Riemannsche Fläche. Für $\omega, \eta \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ setzen wir*

$$\langle \omega, \eta \rangle = \int_X \omega \wedge *\eta.$$

Lemma 8.7. *Dies ist ein Skalarprodukt auf $\mathcal{E}^{(1)}$.*

Beweis: Die Abbildung ist offensichtlich $\mathbb{C}$-linear im ersten Argument und semilinear im zweiten. Für die Symmetrie seien $\omega_1, \eta_1 \in \mathcal{E}^{1,0}(X)$, $\omega_2, \eta_2 \in \mathcal{E}^{0,1}(X)$. Dann ist

$$\omega \wedge *\eta = \omega \wedge i(\overline{\eta_1} - \overline{\eta_2}) = i\omega_1 \wedge \overline{\eta_1} - i\omega_2 \wedge \overline{\eta}_2$$

und andererseits

$$\eta \wedge *\omega = \eta \wedge i\overline{\omega_1} - \overline{\omega_2}) = i\eta_1 \wedge \overline{\omega_2} - i\eta_2 \wedge \overline{\eta}_2.$$

Die beiden Integranden sind komplex konjugiert, also erhalten wir

$$\langle \omega, \eta \rangle = \langle \eta, \omega \rangle.$$

Sei $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}$. In lokalen Koordinaten $z = x + iy$ sei $\omega = f\mathrm{d}z + g\mathrm{d}\overline{z}$,

$$\begin{aligned}
\omega \wedge *\omega &= if\overline{f}\mathrm{d}z \wedge d\overline{z} - ig\overline{g}\mathrm{d}\overline{z} \wedge \mathrm{d}z \\
&= i(|f|^2 + |g|^2)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\overline{z} \\
&= i(|f|^2 + |g|^2)(-2i\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y) = 2(|f|^2 + |g|^2)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y
\end{aligned}$$

Der Integrand ist also mindestens 0. Wir erhalten 0 genau dann, wenn $f = g = 0$, also $\omega = 0$. □

Lemma 8.8. *Sei X kompakte Riemannsche Fläche. Dann sind $\partial\mathcal{E}(X)$, $\overline{\partial}\mathcal{E}(X)$, $\Omega(X)$, $\overline{\Omega}(X)$ paarweise orthogonale Unterräume von $\mathcal{E}^{(1)}(X)$. Die Untervektorräume $d\mathcal{E}(X)$ und $*d\mathcal{E}(X)$ sind zueinander orthogonal, und*

$$d\mathcal{E}(X) \oplus *d\mathcal{E}(X) = \partial\mathcal{E}(X) \oplus \overline{\partial}\mathcal{E}(X).$$

Beweis: Für $\omega \in \mathcal{E}^{1,0}(X)$ und $\eta \in \mathcal{E}^{0,1}(X)$ ist $*\eta \in \mathcal{E}^{0,1}(X)$ und daher $\omega \wedge *\eta = 0$. Also sind $\mathcal{E}^{1,0}(X)$ und $\mathcal{E}^{0,1}(X)$ zueinander orthogonal. Zu zeigen bleibt $\partial\mathcal{E}(X) \perp \Omega(X)$ und $\overline{\partial}\mathcal{E}(X) \perp \overline{\Omega}(X)$. Die Aussagen sind komplex konjugiert, daher genügt es, die erste zu betrachten. Sei $f \in \mathcal{E}(X)$, $\omega \in \Omega(X)$. Dann ist

$$\omega \wedge *\partial f = i\omega \wedge \overline{\partial f} = i\omega \wedge d\overline{f} = -id(\overline{f}\omega).$$

Nach dem Satz von Stokes verschwindet das Integral über die geschlossene Differentialform, also

$$\langle \omega, *\partial f \rangle = 0.$$

Seien nun $f, g \in \mathcal{E}(X)$. Dann ist

$$df \wedge *(*dg) = -df \wedge dg = -d(fdg)$$

also verschwindet wieder das Integral. Also sind $d\mathcal{E}(X)$ und $*d\mathcal{E}(X)$ aufeinander senkrecht. Wir betrachten die direkten Summen. Wegen ist $df = \partial f + \overline{\partial} f$ und

$$*df = *\partial f + *\overline{\partial} f = i\overline{\partial \overline{f}} - i\partial \overline{f}$$

und unseren Rechenregeln ist die linke Seite in der rechten enthalten. Wegen

$$idf + *d\overline{f} = 2i\overline{\partial} f, idf - *d\overline{f} = 2i\partial f$$

ist auch die rechte Seite in der linken enthalten. □

Satz 8.9. *Sei X kompakte Riemannsche Fläche. Dann gilt*

$$\mathcal{E}^{(0,1}(X) = \overline{\partial}\mathcal{E}(X) \oplus \overline{\Omega}(X)$$

und

$$\mathcal{E}^{(1)}(X) = *d\mathcal{E}(X) \oplus d\mathcal{E}(X) \oplus \Omega(X) \oplus \overline{\Omega}(X).$$

Beweis: Nach dem Dolbeautschen Lemma ist

$$H^1(X, \mathcal{O}) \cong \mathcal{E}^{0,1}(X)/\overline{\partial}\mathcal{E}(X).$$

Dieser Vektorraum hat die Dimension g. Der Untervektorraum $\overline{\Omega}(X) \subset \mathcal{E}^{0,1}(X)$ hat ebenfalls Dimension g und ist nach dem Lemma orthogonal zu $\overline{\partial}\mathcal{E}(X)$. Hieraus folgt die erste Behauptung.

Durch komplexe Konjugation erhalten wir die analoge Formel für $\mathcal{E}^{1,0}(X)$. Wir addieren und benutzen noch einmal das letzte Lemma. □

Korollar 8.10. *Sei X kompakte Riemannsche Fläche. Dann gilt*

$$\operatorname{Ker}\left(\mathcal{E}^{(1)} \to \mathcal{E}^{(2)}\right) = d\mathcal{E}(X) \oplus \Omega(X) \oplus \overline{\Omega}(X).$$

Beweis: Die rechte Seite ist offensichtlich in der linken enthalten. Wegen der Zerlegung von $\mathcal{E}^{(1)}(X)$ bleibt zu zeigen, dass $*d\mathcal{E}(X)$ senkrecht auf dem Kern steht. Sei also $\omega \in \operatorname{Ker} d^1$ und $f \in \mathcal{E}(X)$. Dann ist

$$\omega \wedge *(*df) = -\omega \wedge df = d(f\omega)$$

Nach dem Satz von Stokes ist

$$\langle \omega, *df \rangle = \int_X \omega \wedge *(*df) = 0.$$

□

Beweis von Theorem 8.2. Es ist

$$H^1(X, \mathbb{C}) = \frac{\operatorname{Ker} d^1}{d\mathcal{E}(X)} = \Omega(X) \oplus \overline{\Omega}(X).$$

□

Diese Ausagen können auch anders interpretiert werden.

Wir erinnern uns: Sei $U \subset \mathbb{C}$, $f : U \to \mathbb{C}$ eine reell zwei stetig differenzierbare Funktion. Sie heißt *harmonisch*, wenn

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f = 0.$$

Beispiele sind holomorphe und antiholomorphe Funktionen. Jede reelle harmonische Funktion ist Realteil einer eindeutigen holomorphen Funktioen.

Die Bedingung ist äquivalent zu

$$\partial\overline{\partial} f = 0$$

denn für den *Laplace-Operator* gilt

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4\partial\overline{\partial}.$$

In dieser Form verallgemeinert sie auf Riemannsche Flächen.

Definition 8.11. *Sei X Riemannsche Fläche. Eine Funktion $f \in \mathcal{E}(X)$ heißt* harmonisch*, falls $\partial\overline{\partial} f = 0$. Eine Differentialform $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ heißt* harmonisch*, wenn $d\omega = d * \omega = 0$.*

Bemerkung. Eine Differentialform ist genau dann harmonisch, wenn $\partial\omega = \overline{\partial}\omega = 0$. Daher lässt sich jede harmonische Differentialform eindeutig schreiben als $\omega_1 + \omega_2$ mit $\omega_1 \in \Omega(X)$ und $\omega_2 \in \overline{\Omega}(X)$. Die Hodge-Zerlegung lässt sich auch so formulieren: Jede Klasse in $H^1(X, \mathbb{C})$ hat einen eindeutigen harmonischen Repräsentanten.

Korollar 8.12. *Sei X kompakte Riemannsche Fläche. Dann verschwindet jede totale harmonische Differentialform und jede harmonische Funktion ist konstant.*

Beweis: Wir hatten gezeigt, dass $d\mathcal{E}(X)$ senkrecht auf $\Omega(X) \oplus \overline{\Omega}(X)$ steht. Sei f harmonisch. Dann sind ∂f und $\overline{\partial} f$ harmonische Differentialformen, also auch df. Wegen $df = 0$ ist f konstant. □

Der Satz über die Hodge-Zerlegung verallgemeinert sich auf kompakte Kähler-Mannigfaltigkeiten, d.h. komplexe Mannigfaltigkeiten, die gleichzeitig Riemannsche Mannigfaltigkeiten sind. Jede Kohomologieklasse hat einen eindeutigen harmonischen Repräsentanten. Wir erhalten Zerlegungen

$$H^n(X, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=n} H^{p,q}$$

wobei in $H^{p,q}$ die harmonischen Klassen in $\mathcal{E}^{p,q}$ liegen (p mal dz_i, q mal $d\overline{z_j}$). Diese lassen sich auch idntifizieren mit

$$H^{p,q} \cong H^p(X, \Omega^q).$$

Kapitel 9

Die Sätze von Abel und Jacobi

Wir wollen uns nun genauer mit der Frage beschäftigen, welche Divisoren Hauptdivisoren sind. Wir kennen bereits eine notwendige Bedingung: der Grad muss 0 sein.

Beispiel. Sei $X = \hat{\mathbb{C}}$. Sei $D = \sum_{i=1}^{n} a_i P_i$ ein Divisor vom Grad 0. Zur Vereinfachung seien alle $P_i \neq 0$. Dann ist

$$f(z) = \prod_{i=1}^{n} (z - P_i)^{a_i}$$

eine meromorphe Funktion. In $\mathbb{C}$ hat sie den Divisor D. Als rationale Funktion geschrieben ist der Zählergrad gleich dem Nennergrad. Dies bedeutet, dass sich die Funktion holomorph nach ∞ fortsetzt. Der Grenzwert dort ist 1. Also hat f auf $\hat{\mathbb{C}}$ den Divisor D. Die Bedingung ist hinreichend.

Beispiel. Sei $X = \mathbb{C}/\Lambda$ für ein Gitter Λ. Wir wissen auf FT I, dass ein Divisor $D = \sum a_i P_i$ genau dann ein Hauptdivisor ist, wenn der Grad 0 ist und $\sum a_i P_i = 0$ in $\mathbb{C}/\Lambda$. Insbesondere sind nicht alle Divisoren Hauptdivisoren.

Wir haben als Maß für unsere Frage bereits die *Divisorenklassengruppe* $\mathrm{Cl}(X)$ und die Untergruppe $\mathrm{Cl}^0(X)$ der Divisorenklassen vom Grad 0 eingeführt.

Beispiel. Es ist $\mathrm{Cl}^0(X) = 0$ und $\mathrm{Cl}^0(\mathbb{C}/\Omega) \cong \mathbb{C}/\Omega$.

Beweis: Die Abbildung ist durch Aufsummieren gegeben. Sie ist injektiv nach dem oben zitierten Satz. Sie ist surjektiv, da P als Bild des Divisors $P - 0$ gefunden wird. □

Allgemein werden wir finden: $\mathrm{Cl}^0(X) \cong \mathbb{C}^g/\Lambda$ für ein Gitter Λ. Dies verallgemeinert also die beiden obigen Beispiele. Das $\mathbb{C}^g$ ist tatsächlich $\Omega(X)^*$. Wir müssen also einen Weg finden, um aus einem Divisor eine Linearform auf $\Omega(X)$ zu machen. Solche Abbildungen erhalten wir als *Wegintegrale.*

Definition 9.1. *Sei X Riemannsche Fläche. Eine* 1-Kette *ist eine formale Linearkombination*

$$C = \sum_{i=1}^{n} a_i \gamma_i$$

wobei $a_i \in \mathbb{Z}$ und $\gamma_i : [0,1] \to X$ ein Weg. Die Randabbildung *ordnet dieser Kette den endlichen Divisor*

$$\partial C = \sum_{i=1}^{n} a_i (\gamma_i(1) - \gamma_i(0)$$

zu. Element im Kern heißen Zykel. *Wir schreiben $C_1(X,\mathbb{Z})$ für die Gruppe der Ketten und $Z_1(X,\mathbb{Z})$ für die Gruppe der Zykel.*
Sei nun $\omega \in \Omega(X)$. Wir definieren

$$\int_C \omega = \sum_{i=1}^{n} a_i \int_{\gamma_i} \omega.$$

Zwei Zykel C, C' heißen homolog, wenn

$$\int_C \omega = \int_{C'} \omega$$

für alle $\omega \in \Omega(X)$. Sei $H_1(X,\mathbb{Z}) = Z_1(X,\mathbb{Z})/\sim$ die Gruppe der Homologieklassen von Zykeln.

Offensichtlich ist $\deg \partial C = 0$. Geschlossene Wege sind Zykel. Das Integral ist verträglich mit dem Verknüpfen von Wegen, d.h. sind γ_1, γ_2 Wege mit $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$, so gilt

$$\int_{\gamma_1\gamma_2} \omega = \int_{\gamma_1+\gamma_2} \omega$$

Also sind $\gamma_1+\gamma_2$ und $\gamma_1\gamma_2$ homolog. Ist C ein Zykel, so muss der Endpunkt eines Weges in C auch als Anfangspunkt eines Weges vorkommen. Bis auf Homologie sind also Zykel formale Linearkombinationen von geschlossenen Wegen. Nach dem Monodromiesatz sind homotope Wege auch homolog.

Bemerkung. Die obige Definition der Äquivalenzrelation ist zielführend, aber konzeptionell falsch. Eigentlich müssten wir 2-Ketten definieren. In der algebraischen Topologie ist $B_1(X,\mathbb{Z}) = \partial C_2(X,\mathbb{Z})$ die Gruppe der nullhomologen Zykel. In unserer Definition ist die Abbildung

$$H_1(X,\mathbb{Z}) \to \Omega^*(X)$$

automatisch injektiv.

Lemma 9.2. *Sei* $D \in X$ *ein endlicher Divisor vom Grad* 0*. Dann existiert eine* 1*-Kette* C *mit* $\partial C = 0$*. Je zwei solche unterscheiden sich um einen Zykel.*

Beweis: Sei $D = \sum_{i=1}^n a_i P_i$ mit $a_i \neq 0$. Ohne Einschränkung $a_1 > 0$. Es gibt dann ein i mit $a_i < 0$. Wir verbinden P_1 mit P_i durch einen Weg γ. Wir ersetzen D durch $D - \partial\gamma = D - P_1 + P_i$. Mit Induktion lässt sich dieser Divisor beranden. Aus $\partial C = D = \partial C'$ folgt $\partial(C - C') = 0$. □

Definition 9.3. *Wir definieren*

$$\mathrm{Div}^0(X) \to \Omega^*(X)/H_1(X, \mathbb{Z})$$

indem wir D *abbilden auf* $\omega \mapsto \int_C \omega$ *wobei* C *eine Kette mit* $\partial C = D$*.*

Die Abbildung ist wohldefiniert.

Satz 9.4. *Sei* D *ein Hauptdivisor. Dann verschwindet das Bild in* $\Omega^*(X)/H_1(X, \mathbb{Z})$*. Wir erhalten eine wohldefinierte Abbildung*

$$\mathrm{Cl}^0(X) \to \Omega^*(X)/H_1(X, \mathbb{Z}).$$

Wir haben also eine weitere notwendige Bedingung gefunden, wann D ein Hauptdivisor ist.

Beweis: Sei $D = (f) \neq 0$. Wir fassen f als holomorphe Abbildung $f : X \to \mathbb{C}$ auf. Sei n der Grad. Der Nullstellendivisor von f ist $f^{-1}(0)$, der Polstellendivisor $f^{-1}(\infty)$. Sei γ eine Kurve in $\hat{\mathbb{C}}$, die 0 mit ∞ verbindet und alle Verzweigungspunkte vermeidet. Dann zerfällt $f^{-1}(\gamma)$ in n Wege, die je eine Nullstelle von f mit einer Polstelle verbinden. Wir nennen diese Kette $f^*\gamma$. Es gilt $\partial C = (f)$. Sei $\omega \in \Omega(X)$.

Behauptung. $\int_{f^*\gamma} \omega = 0$.

Wir werden gleich eine Differentialform $f_*\omega$ definieren, so dass die Rechenregel

$$\int_{f^*gamma} \omega = \int_\gamma f_*\omega$$

gilt. Auf $\hat{\mathbb{C}}$ ist $\Omega(\hat{\mathbb{C}}) = 0$, also auch $f_*\omega = 0$. Dies beweist die Behauptung und auch den Satz. □

Definition 9.5. *Sei* $f : X \to Y$ *eine endliche holomorphe Überlagerung von kompakten Riemannschen Flächen. Sei* $Y' \subset Y$ *das Komplement der Verzeigungpunkte und* $X' = f^{-1}Y'$*. Sei* $\omega \in \Omega(X)$*. Wir definieren* $f_*\omega \in \Omega(Y')$ *lokal wie folgt: Zu* $y \in Y'$ *gibt es eine offene Umgebung* $U \subset Y'$*, so dass* $f^{-1}(U) = \bigcup_{i=1}^n U_i$ *und* $\phi_i = f|_{U_i} : U_i \to U$ *biholomorph. Wir setzen*

$$f_*\omega = \sum_{i=1}^n (\phi_i^{-1})^*\omega$$

Lemma 9.6. *(i) $f_*\omega$ ist wohldefiniert.*

(ii) $f_*\omega$ setzt sich auf eindeutige Weise holomorph nach Y fort.

(iii) Ist C eine Kette auf Y, so dass das Innere der Wege in Y' verläuft. Dann gilt

$$\int_{f^*C} \omega = \int_C f_*\omega.$$

Beweis: Die lokale Definition ist verträglich mit dem Verkleinern von U, also wohldefiniert. Sei nun y ein Verzweigungspunkt. Dann gibt es eine offene Umgebung U von y, so dass $f^{-1}U = \bigcup_{i=1}^m U_i$, sowie Koordinaten z und z_i, so dass $U \cong B_r(0)$, $U_i \cong B_{r_i}(0)$ und $f|_{U_i} = z_i^{v_i}$. Die Differentialform schreibt sich dann lokal als $f_i(z_i)dz_i$. Der entscheidende Fall (auf den sich alles reduzieren lässt) ist $r = 1$, $i = 1$, $f(z_1) = z_1^N$. Wir schreiben z statt z_1. Außerhalb des Nullpunktes definiert $z \mapsto z^v$ eine biholomorphe Abbildung. Die Umkehrabbildung ist ein Zweig von $z \mapsto z^{1/v}$. Jeder andere Zweig hat die Form ζ_v^j für $j = 1, \dots, v$ wobei ζ_v eine primitive v-te Einheitswurzel ist. Nach Definition gilt auf $U \smallsetminus \{0\}$

$$f_*\omega = \sum_{j=1}^{v} (\zeta_v^j z^{1/v})^N d\zeta_v^j z^{1/k} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{v} \zeta_v^{jN+j} \frac{(z^{1/v})^{N+1}}{z} dz$$

Der Vorfaktor

$$\sum_{j=1}^{N} (\zeta_v^{N+1})^j$$

ist 0, es sei denn $N+1$ ist ein Vielfaches von v. Dann ist der Wert N. Im zweiten Fall $N + 1 = lv$ bleibt etwas zu überprüfen. Sei $|z| = r$. Dann ist

$$\frac{(z^{1/v})^{N+1}}{z} = \frac{z^l}{z} = z^{l-1}.$$

Wegen $N + 1 > 0$ ist $l > 0$ und die Funktion ist holomorph.
Die Formel für das Wegintegral ist klar nach Konstruktion. □

Unser nächstes großes Ziel ist die Injektivität von Φ. Wir formulieren dies etwas um. Sei D im Kern. Sei C' eine Kette mit Rand D. Dann liegt die Linearform

$$\omega \mapsto \int_{C'} \omega$$

im Bild von $H_1(X, \mathbb{Z})$, d.h. es gibt einen Zykel Z mit

$$\int_{C'} \omega = \int_Z \omega$$

für alle ω. Wir ersetzen C' durch $C = C' - Z$. Dies ist eine Kette mit Rand D, so dass

$$\int_C \omega = 0 \text{ für alle } \omega \in \Omega(X).$$

Wir wollen zeigen, dass ein solches D ein Hauptdivisor ist. Wir konstruieren die zugehörige meromorphe Funktion in mehreren Schritten. Zunächst suchen wir nach schwachen Lösungen.

Definition 9.7. *Sei X eine Riemannsche Fläche, D ein Divisor. Sei $X_D = \{x \in X | D(x) \geq 0\}$. Eine* schwache Lösung *von D ist eine Funktion $f \in \mathcal{E}(X_D)$ mit der folgenden Eigenschaft: Jeder Punkt $a \in X$ hat eine Koordinaten-Umgebung (U, z) mit $z(a) = 0$ und eine Funktion $\psi \in \mathcal{E}(U)$ mit $\psi(a) \neq 0$, so dass*

$$f = \psi z^{D(a)} \in \mathcal{E}(X_D \cap U).$$

Ist f holomorph auf X_D, so gilt $(f) = D$ wie gewünscht. Je zwei schwache Lösungen unterscheiden sich um einen Faktor $\phi \in \mathcal{E}(X)$ ohne Nullstellen. Sind f_1 und f_2 schwache Lösungen von D_1 und D_2, so ist $f_1 f_2$ schwache Lösung von $D_1 + D_2$ und f_1/f_2 schwache Lösung von $D_1 - D_2$. Um aus einer schwachen Lösung eine echte zu machen benutzen wir den Ansatz

$$F = \exp(-g)f$$

Dabei muss $g \in \mathcal{E}(X)$ so gewählt werden, dass die Differentialgleichung

$$0 = \overline{\partial} F = f\overline{\partial}(\exp(-g)) + \exp(-g)\overline{\partial} f = -f\exp(-g)\overline{\partial} g + \exp(-g)\overline{\partial} f \Leftrightarrow \overline{\partial} g = \frac{\overline{\partial} f}{f}$$

erfüllt. Für letzteres benutzen wir unsere Erkenntniss über harmonische Funktionen. Die logarithmische Ableitung $\overline{\partial} f/f$ liegt in $\mathcal{E}^{0,1}(X)$, denn lokal gilt $f = \psi z^k$, also

$$\frac{\overline{\partial} f}{f} = \frac{\overline{\partial}\psi}{\psi}.$$

Nach Satz **??** ist

$$\mathcal{E}^{0,1}(X) = \overline{\partial}\mathcal{E}(X) \oplus \overline{\Omega}(X).$$

Unsere Differentialgleichung ist also genau dann lösbar, wenn $\overline{\partial} f/f \perp \overline{\Omega}(X)$. Nach der Definition des Skalarproduktes bedeutet dies

$$\int_X \frac{\overline{\partial} f}{f} \wedge \omega = 0 \text{ für alle } \omega \in \Omega(X).$$

Unsere Voraussetzung ist

$$0 = \int_C \omega = 0 \text{ für alle } \omega \in \Omega(X).$$

Es genügt also eine schwache Lösung zu konstruieren, so dass

$$\int_X \frac{\overline{\partial} f}{f} \wedge \omega = \int_C \omega \text{ für alle } \omega \in \Omega(X).$$

Das gehen wir jetzt an.

Sei f schwache Lösung von D. Dann ist df/f wohldefinierte Differentialform auf dem Komplement des Trägers von D. In den lokalen Koordinaten aus der Definition der schwachen Lösung gilt

$$\frac{df}{f} = k\frac{dz}{z} + \frac{d\psi}{\psi}$$

wobei der zweite Summand in einer Umgebung von a singularitätenfrei ist. Sei $\sigma \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$. Dann existiert

$$\int_X \frac{df}{f} \wedge \sigma$$

wohldefiniert: in der Nähe einer Singularität ist $\sigma = gdz + hd\bar{z}$ und df/f wie oben. Einziger problematischer Beitrag ist $dz/z \wedge d\bar{z}$. Wie im Beweis des Dolbeaultschen Lemmas verschwindet die Singularität, sobald wir in Polarkoordinaten rechnen.

Lemma 9.8. *Sei X Riemannsche Fläche, D ein endlicher Divisor auf X. Sei f eine schwache Lösung von f. Dann gilt für jede Funktion $g \in \mathcal{E}(X)$ mit kompaktem Träger*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_X \frac{df}{f} \wedge dg = \sum_{x\in X} D(x)g(x).$$

Beweis: Sei $a_1, \ldots, a_n$ der Träger von D. Wir wählen disjunkte Koordinatenumgebungen (U_j, z_j) um die a_j mit $z_j(a_j) = 0$, so dass $f = \psi_j z^{k_j}$ wie in der Definition einer schwachen Lösung, ψ nullstellenfrei. Ohne Einschränkung ist $z_j(U_j) \subset \mathbb{C}$ die Einheitskreisscheibe. Sei $0 < r_1 < r_2 < 1$. Dann gibt es Funktionen $\phi_j \in \mathcal{E}(X)$ mit Träger in $|z_j| < r_2$ und $\phi|_{|z_j|\leq r_1} = 1$. Wir setzen $g_j = \phi_j g$ und $g_0 = g - \sum g_j$. Alle Funktionenhaben kompakten Träger. Die Funktion g_0 hat Träger im Komplement von $\{a_1, \ldots, a_n\}$, also ist

$$\frac{df}{f} \wedge dg_0 = -d(g_0\frac{df}{f})$$

singularitätenfrei und total. Nach dem Satz von Stokes verschwindet das Integral. Es folgt

$$\int_X \frac{df}{f} \wedge dg = \sum_{j=1}^n k_j \int_X \frac{df}{f} \wedge dg_j = \sum_{j=1}^n \int_{U_j} \frac{df}{f} \wedge dg_j$$

Wir ersetzen also X durch eines der U_j, d.h. wir sind ab jetzt in der Einheitskreisscheibe, $D = k[0]$ und $f = \psi z^k$, g von der speziellen Form unseres g_j.

$$\int_U \frac{df}{f} \wedge dg = k\int_U \frac{dz}{z} \wedge dg + \int_U \frac{d\psi}{\psi} \wedge dg$$

Das zweite Integral trägt nicht bei, da wieder $d\psi/\psi \wedge dg = -d(gd\psi/\psi)$. Nach dem Satz von Stokes erhalten wir das Integral über den Rand von U, auf em g aber identisch verschwindet.

Weiter ist

$$\int_U \frac{dz}{z}\wedge dg = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon\le|z|\le 1}\frac{dz}{z}\wedge dg$$
$$= -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon\le|z|\le 1} d(g\frac{dz}{z}) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|z|=\varepsilon} g\frac{dz}{z} = 2\pi i g(0).$$

□

Lemma 9.9. *Sei X eine Riemannsche Fläche, $\gamma : [0,1]\to\mathbb{C}$ ein Weg und $U\subset X$ eine relativ-kompakte offene Umgebung von $\gamma([0,1])$. Dann existiert eine schwache Lösung f des Divisors $\partial\gamma$ mit $f|_{X\smallsetminus U}=1$, so dass für jede geschlossene Form $\omega\in\mathcal{E}^{(1)}$ gilt*
$$\int_\gamma \omega = \frac{1}{2\pi i}\int_X \frac{df}{f}\wedge\omega.$$

Beweis: Sei zunächst (U,z) eine Koordinatenumgebung, so dass $z(U)\subset\mathbb{C}$ der Einheitskreis ist. Insbesondere $\gamma([0,1])\subset U$. Sei $a=\gamma(0)$, $b=\gamma(b)$. Da $\gamma([0,1])$ kompakt ist, gibt es ein $r<1$, so dass $\gamma([0,1])\subset\{|z|<r\}$. Wir wählen eine Funktion $\psi\in\mathcal{E}(U)$ mit $\psi=1$ auf $|z|\le r'$ und $\psi=0$ auf $|z|>r''$ für $r<r'<r''<1$. Wir setzen

$$f_0 = \begin{cases} \exp\left(\psi\log\frac{z-b}{z-a}\right) & r<|z|<1 \\ \frac{z-b}{z-a} & |z|\le r, z\ne a \end{cases}$$

Zur Wohldefiniertheit: wegen $|a|,|b|<|z|$ können wir mit dem Hauptzweig des Logarithmus arbeiten in der Form

$$\log\frac{z-b}{z-a} = \log(1-\frac{z}{b}) - \log(1-\frac{z}{a}).$$

Auf einer Umgebung des Kreises $|z|=r$ ist $\psi(z)=1$ und die beiden Definitionen fallen zusammen. Die Funktion f_0 ist beliebig oft differenzierbar.

Auf $|z|>r''$ ist sie identisch 1, kann also zu einer Funktion f in $\mathcal{E}(X\smallsetminus\{a\})$ fortgesetzt werden. Sie ist nach Konstruktion eine schwache Lösung für $\partial\gamma$. Wir überprüfen die Integralbedingung. Sei also ω geschlossene Differentialform. Auf U hat ω eine Stammfunktion, d.h. es gibt $g\in\mathcal{E}(X)$ mit kompaktem Träger mit $dg=\omega$ auf $|z|<r''$. Andererseits verschwindet df/f außerhalb dieser Kreisscheibe. Also

$$\int_X\frac{df}{f}\wedge\omega = \int_{|z|<r''}\frac{df}{f}\wedge dg = g(b)-g(a) = \int_\gamma\omega.$$

Dies beweist die Behauptung im Spezialfall.

Im allgemeinen Fall gibt es eine Unterteilung

$$0=t_0<t_1<\cdots<t_n=1$$

des Intervalls, so dass jeweils $\gamma([t_{i-1}, t_i])$ in einer Koordinatenumgebung liegt. Wir finden schwache Lösungen f_i für diese Wege. Das Produkt ist die gesuchte schwache Lösung für γ. □

Theorem 9.10 (Abel)**.** *Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche. Dann ist*

$$\Phi : \mathrm{Cl}^0(X) \to \Omega(X)^*/H_1(X, \mathbb{Z})$$

injektiv, d.h. ein Divisor D ist genau dann ein Hauptdivisor, wenn es eine Kette C mit Rand D gibt, so dass

$$\int_D \omega = 0 \textit{ für alle } \omega \in \Omega(X).$$

Beweis: Die eine Richtung und die Umformulierung haben wir bereits gezeigt. Sei also C eine Kette, so das alle Integral verschwinden. Nach dem letzten Lemma existiert eine schwache Lösung f von $D = \partial C$ mit

$$\int_C \omega = \frac{1}{2\pi i} \int_X \frac{df}{f} \wedge \omega$$

für alle $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ mit $d\omega = 0$. Insbesonder gilt für $\omega \in \Omega(X)$ nach Voraussetzung

$$0 = \int_C \omega = \frac{1}{2\pi i} \int_X \frac{df}{f} \wedge \omega = \frac{1}{2\pi i} \int_X \frac{\overline{\partial} f}{f} \wedge \omega.$$

In der Sprache des letzten Kapitels impliziert dies

$$\langle \frac{df}{f}, \overline{\omega} \rangle = 0.$$

Lokal hat f die Form ψz^k mit nicht-verschwindendem ψ. Es folgt

$$\frac{\overline{\partial} f}{f} = \frac{\overline{\partial} \psi}{\psi} \in \mathcal{E}^{0,1}(X).$$

Nach Satz 8.9 ist

$$\mathcal{E}^{0,1}(X) = \overline{\partial}\mathcal{E}(X) \oplus \overline{\Omega}(X)$$

Unser Element ist orthogonal zu $\overline{\Omega}(X)$, liegt also in $\overline{\partial}\mathcal{E}(X)$, d.h. es gibt ein $g \in \mathcal{E}(X)$ mit

$$\overline{\partial} g = \frac{\overline{\partial} f}{f}.$$

Wir setzen

$$F = \exp(-g) f.$$

Dies ist weiterhin eine schwache Lösung von D. Gleichzeitig gilt

$$\overline{\partial} F = f \overline{\partial}(\exp(-g)) + \exp(-g)\overline{\partial}(f) = f(-\exp(-g)\overline{\partial}(g) + \exp(-g)\overline{\partial}(f) = \exp(-g) f[-\overline{\partial}(g) + f^{-1}\overline{\partial}(f)] =$$

Damit ist F sogar eine meromorphe Funktion mit Divisor D. □

Als nächstes wollen wir das Bild von $H_1(X, \mathbb{Z})$ in $\Omega(X)^*$ besser verstehen.

Lemma 9.11. *Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht g. Dann gibt es g paarweise verschiedene Punkte $a_1, \ldots, a_g \in X$, so dass gilt: Jede holomorphe Differentialform $\omega \in \Omega(X)$, die in allen a_i verschwindet, ist identisch 0.*

Beweis: Für jedes $a \in X$ betrachten wir den Vektorraum H_a der holomorphen Differentialformen, die in a verschwinden. Mit anderen Worten:

$$H_a = L(K - a) \subset L(K)$$

wobei K ein kanonischer Divisor. Dies ist ein Vektorraum der Dimension g oder $g - 1$. Für jede endliche Menge von Punkten $a_1, \ldots, a_n$ gilt dann

$$\bigcap_{i=1}^{n} H_{a_i} = L(K - a_1 - \cdots - a_n)$$

Dieser Vektorraum wird trivial, sobald n groß genug wird. Insbesondere ist

$$\bigcap_{a \in X} H_a = 0.$$

Da $\Omega(X)$ die Dimension g hat, gibt es eine Folge von Punkten $a_1, \ldots, a_g$, so dass in jedem Schritt die Dimension um eines verkleinert wird. Dies ist die gesuchte Menge von Testpunkten. □

Satz 9.12. *Sei X kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlechte $g \geq 1$. Dann ist das Bild von $H_1(X, \mathbb{Z})$ in $\Omega(X)^*$ ein Gitter, d.h. eine diskrete Untergruppe vom Rang $2g$.*

Konkreter: Sei $\omega_1, \ldots, \omega_g$ eine Basis von $\Omega(X)$. Für jeden Zykel Z erhalten wir einen Punkt

$$\left(\int_Z \omega_i \right)_i \in \mathbb{C}^g$$

Die Menge dieser Punkte ist nach dem Satz ein Gitter, d.h. eine diskrete Untergruppe vom Rang $2g$. Man spricht auch vom *Periodengitter.*

Beweis: Wir werden mit dem Periodengitter $\Gamma \subset \mathbb{C}^g$ arbeiten. Um zu zeigen, dass es diskret ist, muss für 0 eine Umgebung konstruiert werden, die keine anderen Gitterpunkte enthält. Dafür benutzen wir den Satz über implizte Funktionen.

Seien $a_1, \ldots, a_g$ Testpunkte wie im Lemma. Wir wählen disjunkte Koordinatenumgebungen (U_j, z_j) um diese a_j mit $z_j(a_j) = 0$ und $z_j(U_j)$ eine Kreisscheibe. Sei

$$\omega_i = \phi_{ij} dz_j \in \Omega(U_j).$$

Wir betrachten die Matrix

$$A = (\phi_{ij}(a_j)) \in M_{g \times g}(\mathbb{C}).$$

Behauptung. *A hat vollen Rang.*

Angenommen, es gibt eine Linearkombination der Zeilen zu Null, also

$$\sum_{i=1}^{g} \lambda_i \phi_{ij}(a_j) = 0 \text{ für alle } j$$

Dann hat $\omega = \sum_{i=1}^{g} \lambda_i \omega_i$ eine Nullstelle in allen a_j, ist also selber 0. Dies ist ein Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit der ω_i.
Wir definieren nun

$$F : U_1 \times \dots U_g \to \mathbb{C}^g, F = (F_1, \dots, F_g)$$

wobei

$$F_i(x_1, \dots, x_g) = \sum_{j=1}^{g} \int_{a_j}^{x_j} \omega_i$$

Das Wegeintegral wird jeweils in der Kreisscheibe U_j gebildet und ist daher unabhängig von der Wahl des Weges. Es gilt einfach

$$\int_{a_j}^{x_j} = \Phi_{ij}(x_j) - \Phi(a_j)$$

wobei Φ_{ij} eine Stammfunktion von ϕ_{ij} auf U_{ij}. Die Abbildung ist bezüglich $z_1, \dots, z_g$ komplex differenzierbar mit Jacobi-Matrix

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial z_j}(x) \right) = (\phi_{ij}(x_j))$$

Im Punkt $a = (a_1, \dots, a_g)$ ist sie invertierbar. Nach dem Satz über implizite Funktionen enthält

$$W = F(U_1 \times \dots U_g) \subset \mathbb{C}^g$$

eine offene Umgebung von $F(a) = 0$.
Sei nun $t \in \Gamma \cap (W \setminus \{0\})$. Dann existiert ein $x = (x_1, \dots, x_g) \in U_1 \times \dots U_g$ mit $x \neq a$ und $F(x) \in \Gamma$. Ohne Einschränkung ist $x_j \neq a_j$ für $1 \leq j \leq k$ und $x_j = a_j$ für $j > k$. Dabei ist $k \geq 1$. Wir wenden das Theorem von Abel an auf den Divisor $D = \sum_{j=1}^{k} (x_j - a_j)$. Er hat Grad 0, wird berandet durch die Wege $[a_j, x_j \subset U_j$, und wegen unser Wahl von X liegt die zugehörige Linearform liegt im Bild von $H_1(X, \mathbb{Z})$. Also ist D ein Hauptdivisor. Sei f die zugehörige meromorphe Funktion. Sie hat in a_j einen einfachen Pol und in x_j eine einfache Nullstelle, jeweils für $1 \leq j \leq k$. Sei $c_j z_j^{-1}$ der Hauptteil von f in a_j (also $c_j \neq 0$ für $1 \leq j \leq k$). Nach dem Residuensatz

$$0 = \operatorname{Res}(f\omega_i) = \sum_{j=1}^{k} c_j \phi_{ij}(a_j) \text{ für } i = 1, \dots, g$$

Dies widerspricht der Tatsache, dass A vollen Rang hat. Dieser Widerspruch zeigt, dass Γ diskrete Untergruppe von $\mathbb{C}^g$ ist.

Zu zeigen bleibt, dass Γ nicht in einem echten reellen Unterraum von $\mathbb{C}^g$ enthalten ist. Angenommen, dies ist doch der Fall. Dann gibt es eine reelle Linearform auf $\mathbb{C}^g$, die auf Γ verschwindet. Wir fassen sie als Realteil einer komplexen Linearform auf. Es gibt also ein Tupel $(c_1, \dots, c_g) \in \mathbb{C}^g \setminus \{0\}$, so dass

$$\mathrm{Re}\left(\sum_{j=1}^{g} c_j \int_\gamma \omega_j\right) = 0$$

für alle geschlossenen Wege γ. Sei $\omega = \sum c_i\omega_i$, $\sigma = \mathrm{Re}(\omega)$. Dies ist eine harmonische Form. Da das Integral über jeden geschlossenen Weg verschwindet, existiert eine Stammfunktion $g \in \mathcal{E}(X)$. Wir wissen aus Korollar 8.12, dass solche harmonische Funktionen verschwinden. Da ω holomorph ist, folgt aus $\mathrm{Re}(\omega) = 0$ auch $\omega = 0$. Dies ist wieder ein Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit der ω_i. □

Definition 9.13. *Der Quotient*

$$\mathrm{Jac}(X) = \Omega(X)^*/H_1(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{C}^g/\Gamma$$

heißt Jacobi-Mannigfaltigkeit *von X.*

Es handelt sich um eine komplexe Mannigfaltigkeit der Dimension g.

Theorem 9.14 (Jacobi)**.** *Für jede kompakte Riemannsche Fläche X ist*

$$\Phi : \mathrm{Cl}^0(X) \to \mathrm{Jac}(X)$$

ein Gruppenisomorphismus.

Beweis: Die Injektivität war das Theorem von Abel. Sei nun $P \in \mathrm{Jac}(X)$, repräsentiert durch einen Vektor $\xi \in \mathbb{C}^g$. Für genügend großes $N \in \mathbb{N}$ liegt $\frac{1}{N}\xi$ in der Umgebung W von 0, die wir oben konstruiert hatten, d.h. es gibt Punkte $a_j, x_j \in X$, Kurven γ_j von a_j nach x_j so dass für $C = \sum \gamma_j$ gilt

$$\left(\int_C \omega_1, \dots, \int_C \omega_g\right) = \frac{1}{N}\xi.$$

Für den Divisor $D = \partial C$ gilt also $\Phi(D) = \frac{1}{N}P$. Also ist $\Phi(ND) = P$. □

Nach Wahl eines Tupels $a_1, \dots, a_g \in X$ erhalten wir eine Abbildung

$$\Psi : X^g \to \mathrm{Cl}^0(X)(x_1, \dots, x_g) \mapsto \sum(x_i - a_i).$$

Durch Komposition mit Φ erhalten wir

$$J : X^g \to \mathrm{Jac}(X).$$

Satz 9.15. *Die Abbildung J ist surjektiv.*

Beweis: Da Φ ein Isomorphismus ist, geht es um die Surjektivität von Ψ. Sei $D \in \mathrm{Div}^0(X)$. Wir betrachten

$$D' = D + \sum a_j$$

Dies ist ein Divisor vom Grad g. Nach dem Satz von Riemann-Roch ist

$$l(D') \geq 1 - g + g = 1$$

Es gibt also eine meromorphe Funktion f auf X mit $(f) \geq -D'$. Dann ist

$$D'' = (f) + D' \geq 0$$

Da D'' Grad g hat, gibt es also Punkte $x_1, \ldots, x_g$ mit

$$D'' = \sum x_j.$$

Es folgt

$$\sum (x_j - a_j) = (f) + D' - \sum a_j = (f) + D.$$

Also liegt die Klasse von D im Bild. □

Bemerkung. Ist ist leicht zu sehen, dass die Abbildung J holomorph ist. Der Grund ist, dass eine Funktion der Form $x \mapsto \int_a^x \omega_i$ holomorph ist.

Satz 9.16. *Für jede kompakte Riemannsche Fläche X vom Geschlecht* 1 *ist $J : X \to \mathrm{Jac}(X)$ ein Isomorphismus.*

Beweis: In diesem Fall ist $\mathrm{Jac}(X)$ selbst eine kompakte Riemannsche Fläche. Die Abbildung J ist bijektiv und (wie eben bemerkt) holomorph, also ein Isomorphismus von Riemannschen Flächen. □

Ausblick auf Geradenbündel

Systematisch haben wir uns die ganze Zeit mit Divisoren beschäftigt. Wir haben aber gesehen, dass $\mathcal{O}_D$ ein Gradenbündel ist. Die Zurordnung definiert einen Homomorphismus

$$\mathrm{Cl}(X) \to \mathrm{Pic}(X)$$

wobei $\mathrm{Pic}(X)$ die Gruppe der Isomorphieklassen von holomorphen Geradenbündel auf X ist. Wir haben gezeigt, dass sie sich mit identifizieren lässt mit

$$\mathrm{Pic}(X) = H^1(X, \mathcal{O}^*).$$

Die Exponentialsequenz

$$0 \to 2\pi i\mathbb{Z} \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}^* \to 0$$

induziert eine Abbildung

$$\mathrm{Pic}(X) \to H^2(X, 2\pi\mathbb{Z}).$$

Falls X kompakt ist, so haben wir gesehen, dass

$$H^2(X, \mathbb{C}) \cong H^1(X, \Omega) \cong \mathbb{C}.$$

Tatsächlich gilt (algebraische Topologie) $H^2(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. Wir erhalten eine Abbildung

$$c_1 : \mathrm{Pic}(X) \to \mathbb{Z},$$

die *erste Chernklasse*. Der Wert von c_1 heißt auch *Grad* des Geradenbündels. Sei $\mathrm{Pic}^0(X)$ die Untergruppe der Geradebündel vom Grad 0. Man verifziert, dass im Fall von $\mathcal{L} = \mathcal{O}_D$ gilt

$$c_1(\mathcal{O}_D) = \pm \deg(D).$$

(Das Vorzeichen hängt von der genauen Normierungen der Randabbildungen in den langen exakten Sequenzen ab.) Wir erhalten eine induzierte Injektion

$$\mathrm{Cl}^0(X) \to \mathrm{Pic}^0(X).$$

Aus der Exponentialsequenz erhalten wir außerdem

$$\mathrm{Pic}^0(X) \cong H^1(X, \mathcal{O})/H^1(X, 2\pi i\mathbb{Z}) \cong \mathbb{C}^g/H^1(X, 2\pi i\mathbb{Z}).$$

Wir haben gezeigt, dass $H^1(X, \mathbb{C})$ ein Vektorraum der Dimension $2g$ ist. In der algebraischen Topologie zeigt man, dass sogar $H^1(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{2g}$, dual zu $H_1(X, \mathbb{Z})$ wie es bei uns vorkam. Insgesamt haben wir also einen Gruppenhomomorphismus

$$\Omega(X)^*/H_1(X, \mathbb{Z}) \to \mathbb{C}^g/H^1(X, \mathbb{Z}).$$

Wegen der vielen Identifkationen ist nicht einfach, diese Abbildung zu identifizieren. Aber hier ist das Ergebnis: Wir haben $\Omega(X) \oplus \overline{\Omega}(X) = H^1(X, \mathbb{C})$. Beide stehen bezüglich des Skalarproduktes senkrecht aufeinander. Daher lässt sich $\Omega(X)^*$ identifizieren mit $\overline{\Omega}(X)$. Dieses ist via $H^1(X, \mathbb{C}) \to H^1(X, \mathcal{O})$ isomorph zu $H^1(X, \mathcal{O})$. Bei dieser Paarung wird $H_1(X, \mathbb{Z})$ auf $H^1(X, \mathbb{Z})$ abgebildet. Es gilt insgesamt:

Theorem 9.17. *Sei X kompakt. Dann gilt*

$$\mathrm{Cl}^0(X) \cong \mathrm{Pic}(X).$$

Jedes holomorphe Geradenbündel ist von der Form $\mathcal{O}_D$ für einen Divisor D.

Man kann den Divisor als Divisor eines meromophen Schnittes des Geradenbündeles rekonstruieren. Dessen Existenz ist aber a priori nicht klar. Ein alternativer Beweis benutzt GAGA: (géométrie algébrique, géométrie analytique, Serre) Jedes holomorphe Geradenbündel auf einer kompakten Riemannschen Fläche ist algebraisch, hat also einen meromorphen Schnitt.

Kapitel 10

Modulformen

Wir beginnen mit der klassichen Definition. Die Gruppen $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ der ganzzahligen Matrizen mit Determinante 1 operiert via Möbiustransformationen auf der oberen Halbebene.

$$\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}\tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}.$$

Die Theorie wird interessanter, wenn wir auch Untergruppen zulasssen.

Definition 10.1. *Für $N \geq 1$ heißt*

$$\Gamma(N) = \mathrm{Ker}\,(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}))$$

Hauptkongruenzuntergruppe *vom Level N.*

Definition 10.2. *Eine* Modulform *vom Gewicht k und Level N ist eine holomorphe Funktion*

$$f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$$

so dass für alle $A = \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} \in \Gamma(N)$ gilt

$$f(A\tau) = (c\tau + d)^k f(\tau)$$

und $\tau \mapsto (z\tau + d)^{-k} f(A\tau)$ ist beschränkt für $\tau \to \infty$ für jedes $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Man sagt auch: f ist holomorph im Unendlichen. Die Matrix $\begin{matrix} 1 & N \\ 0 & 1 \end{matrix} \in \Gamma(N)$ operiert als $\tau \mapsto \tau + N$. Aus der Funktionalgleichung folgt also

$$f(\tau + N) = f(\tau).$$

Wir können die Funktion in eine Fourier-Reihe entwickeln. Mit $q_N = \exp(2\pi i\tau/N)$ gilt

$$f(\tau) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n q_N^n.$$

Wegen des Riemannschen Hebbarkeitssatzes bedeutet die Beschränktheitsvoraussetzung also einfach, dass diese Reihe eine Potenzreihe ist und eine holomorphe Funktion definiert.. Diese Bedingung stellen wir nicht nur für f, sondern auch symmetrisch für alle Translate unter Gruppenelementen. Es handelt sich nur um endlich viele Bedingungen, da $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})/\Gamma(N)$ endlich ist.

Theorem 10.3. *Der Vektorraum der Modulformen für festes N und k hat endliche Dimension.*

Für die Dimension gibt es sogar eine explizite Formel. Wir wollen den Beweis dieses Theorems mit der Theorie der Riemannschen Flächen herleiten.

Definition 10.4. *Für $N \geq 1$ sei*

$$Y(N) = \mathbb{H}/\Gamma(N).$$

Mit etwas Gruppentheorie erhält man leicht:

Satz 10.5. *$Y(N)$ ist eine Riemannsche Fläche. Für $N \geq 2$ ist die Überlagerung*

$$\mathbb{H} \to Y(N)$$

unverzweigt. Für $N = 1$ ist sie verzweigt in i und $\varrho = \exp(2\pi i/3)$.

Beweisidee: Wir beginnen mit $N = 1$. Die Gruppe wird erzeugt von $S = \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}$ (operiert als $\tau \mapsto -\tau^{-1}$) und $T = \begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix}$. Ein Fundamentalbereich ist

$$F = \{\tau \in \mathbb{H} | |\tau| \geq 1, |\mathrm{Re}(\tau)| \leq 1/2\}.$$

Der Quotient $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})/\pm 1$ operiert treu. Einzige Punkte mit nicht-trivialer Standgruppe sind i (Standgruppe $\{1, S\}$ und ϱ (Standgruppe $\{1, ST, (ST)^2\}$). Diese Element liegen nicht in $\Gamma(N)$ für $N \geq 2$, also operieren diese Gruppen (bzw. $\Gamma(2)/\pm 1$) fixpunktfrei. Dann folgt aus allgemeinen Prinzipien (wie bei elliptischen Kurven), die Unverzweigtheit der Quotientenabbildung. Im Falle von endlichen Standgruppen muss man etwas sorgfältiger arbeiten und erhält eine verzweigte Überlagerung. □

Wir wollen diese Riemannschen Flächen kompaktifizieren. Im Falle von $N = 1$ sieht man es sofort:

$$X(1) = Y(1) \cup \{\infty\}$$

Die Funktion $q = q_1 = \exp(2\pi i\tau)$ definiert eine eine Koordinate in einer Umgebung. Wir kleben also eine Kreisscheibe vom Radius 1 ein. Der Nullpunkt wird mit ∞ identifiziert. Die punktierte Kreisscheibe wird mit $\mathrm{Im}\tau > 1$ identifiziert.

Lemma 10.6. $X(1) = \hat{\mathbb{C}}$.

Beweis: Es gibt einen rechnerischen Beweis durch direkte Angabe eines Isomorphismus, d.h. einer meromorphen Modulform für $N = 1$, $k = 0$. Wir gehen anders vor. $X(1)$ ist eine kompakte Riemannsche Fläche. Anstarren ergibt eine topologische Kugel, also $g = 0$. Oder: Wir zerlegen $X(1)$ in Dreiecke zerlegen. Wir benutzen Die Ränder des Fundamentalbereichs und die imaginäre Achse. Dies ergibt 2 Flächen, 3 Kanten und 3 Ecken, also

$$\chi(X(1)) = 2 - 3 + 3 = 2 - 0 \Rightarrow g = 0.$$

Jede kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht 0 ist isomorph zu $\hat{\mathbb{C}}$. □

Beim Kompaktifiieren von $Y(N)$ für $N \geq 2$ müssen mehr Kreisscheiben eingeklebt werden, da der Fundamentalbereich aus mehreren Kopien von F besteht. Elegant geht es so:

Definition 10.7. *Sei*

$$\mathbb{H}^* = \mathbb{H} \cup \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$$

mit der natürlichen Operation von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. *Für* $N \geq 1$ *sei*

$$X(N) = \mathbb{H}^*/\Gamma(N).$$

Die Punkte im Komplement von $Y(N)$ heißen auch *Spitzen* (englisch: *cusps*). Es sind jeweils nur endlich viele Punkte, da $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ transitiv auf $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ operiert.

Satz 10.8. $X(N)$ *ist eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht*

$$g = 1 + \frac{N - 6}{12} t(N)$$

wobei $t(N) = |\,\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})/\pm\Gamma(N)|$ *die Anzahl der Spitzen ist.*

Beweisidee: Die Struktur als Riemannsche Fläche erhalten wir durch Transport der Konstruktion für $X(1)$ mit Gruppenelementen. Das Geschlecht berechnen wir aus Riemann-Hurzwitz, in dem wir den Überlagerungsgrad und die Verzweigungspunkte von

$$X(N) \to X(1)$$

analysieren. Achtung: die Spitzen sind verzweigt! □

Wir kehren nun zurück zu Modulformen. Die Funktionen sind nicht invariant unter $\Gamma(N)$, also nicht etwa Funktionen auf $Y(N)$ oder $X(N)$. Statt dessen sind sie Schnitte von Geradenbündeln! Die behauptete Endlichdimensionalität folgt dann aus unseren allgemeinen Sätzen. Wollen wir Formeln für die Dimension, so müssen wir die Geradenbündel identizifieren.

Für ungerade k gibt es keine Modulformen, da $A = -1$ die Gleichung $f = -f$ erzwingt.

Satz 10.9. *Der Raum der Modulformen vom Gewicht k und Level N kann identifiziert werden mit den globalen Schnitten des Geradenbündels*

$$\Omega^{\otimes k/2} \otimes \mathcal{O}_{\mathrm{cups}} = \mathcal{O}_{\frac{k}{2}K+\mathrm{cusp}}.$$

(Formel ohne Gewähr)

Beweisidee: Wir arbeiten zuerst auf $\Gamma(N)$. Zu berechnen ist $A^*d\tau$ für $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Wir erhalten gerade das Transformationsverhalten von Modulformen vom Gewicht 2. Den Fall $k > 2$ erhalten wir dann als Potenz. Danach drücken wir $d\tau$ in Termen von dq aus. Man erhält einen zusätzlichen Faktor q, daher muss kommt der Spitzendivisor ins Spiel. □

Zahlentheorie

Jede Modulform kann in eine Fourier-Reihe entwickelt werden. Besonders interessant sind die *Spitzenformen*, die im Unendlichen den Wert 0 haben. Dieser Raum hat eine Basis von Funktionen mit Fourier-Koeffiienten in einer endlichen Erweiterung von $\mathbb{Q}$. Der Fourier-Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n$ ordnet man dann die L-Reihe

$$L(f,s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

zu. Sie konvergiert für $\mathrm{Re}(s)$ genügend groß und definiert dann eine holomorphe Funktion. Sie setzt sich zu einer holomorphen Funktion auf ganz $\mathbb{C}$ fort, die einer Funktionalgleichung genügt. Solche Funktionen tauchen auch an anderen Stellen der Zahlentheorie auf, z.B. für jede algebraische Varietät über $\mathbb{Q}$. Für deren Definition zählt man die Anzahl der Punkte über endlichen Körpern.

Zu den tiefsten Vermutungen der aktuellen Mathematik gehören die Fragen, wie die beiden Typen zusammenhängen. Die berühmte Vermutung von Shimura-Taniyama-Weil besagte, dass alle elliptischen Kurven über $\mathbb{Q}$ modular sind, d.h. ihre L-Funktion kommt von einer Modulform her. Dies lässt sich geometrisch übersetzen: Jede elliptische Kurve über $\mathbb{Q}$ lässt sich von einer Kurve $X(N)$ überlagern.

Modulprobleme

Die zahlentheoretische Relevanz liegt wohl letztlich daran, dass auch $X(N)$ nicht nur eine Riemannsche Fläche, sondern auch eine algbraische Varität über $\mathbb{Q}$ oder sogar $\mathbb{Z}$ ist. Das liegt wiederum an der *modularen Interpretation.*

(i) Die Punkte von $Y(1)$ stehen in Bijektion mit den Isomorphieklassen von elliptischen Kurven (kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht 1 zusammen mit der Wahl eines Punktes). Wir haben bereits gesehen, dass jede solche Kurve von der Form $\mathbb{C}/\Lambda$ ist, wobei die Wahl des Punktes in die Definition des Isomorphismus einging. Ohne Einschränkung ist dann das Gitter von der Form $\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z}$ mit $\tau \in HH$. Zwei Kurven sind isomorph, wenn die Punkte in derselben Bahn bezüglich $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ liegen.

(ii) Die Punkte von $Y(N)$ stehen in Bijektion mit den Isomorphieklassen von Paaren (E,γ) wobei E eine elliptische Kurve und $\gamma : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2 \to E[N]$ ein Isomorphismus zur N-Torsion von E ist.

(iii) Die Spitzen von $X(N)$ haben eine Interpretation als *verallgemeinerte elliptische Kurven*, dies sind spezielle singuläre algebraische Kurven.

(iv) Alle diese Objekte können als algebraische Varietäten interpretiert werden. Daher können wir vom Grundkörper $\mathbb{C}$ zu jedem anderen Grundkörper oder Ring übergehen. Die Modulkurven sind kanonisch über $\mathbb{Z}$ definiert. Auch die Geradenbündel und daher die Geradenbündel verallgemeinern sich.

Was ist mit höherem Geschlecht? Die Situation ist schwieriger, aber im Prinzip verstanden. Auch hier definiert man Modulräume. Zum Studium gibt es mehrere Zugänge:

(i) Man bettet die Kurve in ihre Jacobische ein. Diese ist eine abelsche Varietät. Die Theorie der Modulräume von abelschen Varietäten funktioniert (mit einigen Abstrichen) ähnlich wie im eindimensionalen Fall.

(ii) Man betrachtet den Raum der Polynomgleichungen von festem Grad und die dadurch definierten Kurven im $\mathbb{P}^2$. Jede Kurve kann so geschrieben werden, es müssen also noch die Isoklassen gebildet werden. Dies ist ein Quotientenproblem. Es wird mit den Mitteln der *geometrischen Invariantentheorie* behandelt.

(iii) Wählt man zusätzlich auf der kompakten Riemannschen Fläche ein "quadratisches Differential", so erhält man den *Teichmüllerraum*, der sehr gut analytisch beschrieben werden kann. Er hat als Koordinaten die Länge der $2g$ Standardzykel. Dies könnte man als Funktionentheorie III behandeln.

Inhaltsverzeichnis