Übungen zur Vorlesung "Funktionentheorie II" WS16/17 Blatt 1

Ausgabe: 25.10.2016, **Abgabe:** 2.11.2016

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/ws16/ftheorie2/ftheorie1617.htm

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 1.1: Sei $f(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$ ein Polynom. Zeigen Sie, dass es genau eine holomorphe Abbildung

$$\tilde{f} : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$$

gibt, die $\tilde{f}\Big|_{\mathbb{C}} = f$ erfüllt, d.h. deren Einschränkung auf $\mathbb{C}$ mit dem gegebenen Polynom übereinstimmt.

(4 Punkte)

Aufgabe 1.2: Entscheiden Sie, ob die folgenden Abbildungen wohldefiniert und holomorph sind. U_∞ und U_0 sind wie in der Vorlesung definiert. Geben Sie jeweils eine Begründung für Ihre Antwort. Es sei jeweils $f_i : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ mit

1. $$f_1|_{U_0}(z) = z^2 \in U_0 \qquad \text{und} \qquad f_1|_{U_\infty}(z) = z^2 \in U_0$$
2. $$f_2|_{U_0}(z) = z^2 \in U_0 \qquad \text{und} \qquad f_2|_{U_\infty}(z) = z^2 \in U_\infty$$
3. $$f_3|_{U_0}(z) = z^2 \in U_\infty \qquad \text{und} \qquad f_3|_{U_\infty}(z) = z^2 \in U_0$$

(falls Sie es nicht sehen: Die Varianten unterscheiden sich in den Karten, zwischen denen wir abbilden)

(6 Punkte)

Aufgabe 1.3: Sei
$$\mathbb{P}^1 := \{(z_0, z_1) \mid \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}\}/\sim\,,$$
wobei “$\sim$” die Äquivalenzrelation bezeichnet, sodass $(z_0, z_1) \sim (w_0, w_1)$ genau dann wenn es ein $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ gibt, dass $z_0 = \lambda w_0$ und $z_1 = \lambda w_1$ gelten. Wir definieren U_i (für $i = 0, 1$) als die Teilmenge, auf der $z_i \neq 0$ gilt.

1. Geben Sie $\mathbb{P}^1$ die Struktur einer Riemannschen Fläche.
2. Konstruieren Sie einen Isomorphismus $\mathbb{P}^1 \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathbb{C}}$.

(6 Punkte)

Aufgabe 1.4: Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gitter. Beweisen Sie, dass es *keinen* Isomorphismus
$$\mathbb{C}/\Omega \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathbb{C}}$$
geben kann.
(Tipp: Was wissen Sie über Funktionen, die auf diesen Riemannschen Flächen definiert sind?)

(6 Punkte)