Übungen zur Vorlesung "Funktionentheorie II"
WS16/17 Blatt 2

Ausgabe: 2.11.2016, **Abgabe:** 8.11.2016

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/ws16/ftheorie2/ftheorie1617.htm

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 2.1: Beantworten Sie für jede der folgenden Abbildungen die nachfolgenden Fragen:
Welche der folgenden Abbildungen sind Überlagerungen? Wenn ja, sind sie unverzweigt, eigentlich oder unverzweigt und unbegrenzt? Was ist die Blätterzahl?

1. $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \mathrm{Re}(z)$;
2. $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times$;
3. $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$;
4. $B_1(0) \to B_1(0)$, $z \mapsto z^2$;
5. $B_1(0) \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z^2$;
6. $B_1(2) \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z^2$;
7. $\mathbb{C}/\Omega \to \mathbb{C}/\Omega$, $z \mapsto 3z$ (wobei Ω ein Gitter in $\mathbb{C}$ bezeichnet).

Geben Sie jeweils eine knappe Begründung an. Ein vollständiger Beweis ist nicht notwendig.

(7 Punkte)

Aufgabe 2.2: Beweisen Sie, dass es für jeden Punkt $z \in \mathbb{C}$ und jede abgeschlossene Menge $A \subset \mathbb{C}$ mit $z \notin A$, offene Umgebungen U_1 von z sowie U_2 von A gibt, sodass U_1 und U_2 disjunkt sind, d.h. $U_1 \cap U_2 = \varnothing$.

(4 Punkte)

Aufgabe 2.3: Sei $\mathbb{C}^\times := \mathbb{C} - \{0\}$ und $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ mit $|\lambda| < 1$. Wir definieren

$$\begin{aligned} Y_\lambda &:= \mathbb{C}^\times / \left\langle \lambda^{\mathbb{Z}} \right\rangle \\ &= \frac{\mathbb{C}^\times}{\{z \sim z' :\Leftrightarrow \frac{z}{z'} = \lambda^n \text{ für } n \in \mathbb{Z} \text{ beliebig}\}}. \end{aligned}$$

Wie üblich, versehen wir diesen Raum mit der Quotiententopologie.

1. Zeigen Sie, dass Y_λ ein Hausdorffraum ist.
2. Sei $\tau \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl mit $\operatorname{Im} \tau > 0$. Dann ist $\Omega := \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$ ein Gitter. Zeigen Sie, dass für $\lambda := e^{2\pi i \tau}$

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{C}/\Omega &\longrightarrow Y_\lambda \\ z &\longmapsto e^{2\pi i z} \end{aligned}$$

eine wohldefinierte Abbildung festlegt. Geben Sie Y_λ die Struktur einer Riemannschen Fläche, sodass Φ eine holomorphe Abbildung ist.
3. Zeigen Sie, dass Φ ein Isomorphismus Riemannscher Flächen ist.

(6 Punkte)

Aufgabe 2.4: Betrachten Sie das Polynom

$$f(z) = z^5 - 2z$$

als holomorphe Abbildung $\widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$. Bestimmen Sie für alle Punkte $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ die Vielfachheit der Abbildung.

(3 Punkte)

Bonus-Aufgabe 2.5: Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche, $\{x_1, \ldots, x_r\} \in X$ Punkte und $f : X \setminus \{x_1, \ldots, x_r\} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Abbildung. Beweisen Sie, dass dann f entweder konstant ist oder aber dichtes Bild in $\mathbb{C}$ besitzt.

(6 Punkte)