Übungen zur Vorlesung "Funktionentheorie II"
WS16/17 Blatt 11

Ausgabe: 10.1.2017, **Abgabe:** 17.1.2017

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/ws16/ftheorie2/ftheorie1617.htm

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Hinweis: Für die Aufgaben dieses Übungsblatts dürfen Sie den Satz von Riemann–Roch benutzen, auch wenn er noch nicht komplett bewiesen ist.

Aufgabe 11.1: Sei X kompakte Riemannsche Fläche von Geschlecht $g(X) = 1$.

1. Zeigen Sie, dass $l(K) = 1$ für den kanonischen Divisor K.
2. Zeigen Sie, dass der kanonische Divisor K Grad Null besitzt.
3. Folgern Sie, dass der kanonische Divisor K ein Hauptdivisor ist.
4. Folgern Sie, dass für alle Divisoren D die Gleichung
$$l(D) - l(-D) = \deg D$$
gilt.

(4 Punkte)

Aufgabe 11.2: Sei wieder X eine kompakte Riemannsche Fläche von Geschlecht $g(X) = 1$. Sei nun $O \in X$ ein beliebig gewählter Punkt.

1. Zeigen Sie: Für jeden Divisor D von Grad Null existiert ein eindeutig bestimmter Punkt $P \in X$, der die Gleichung $D \sim (P) - (O)$ erfüllt.
2. Dies definiert eine Abbildung $\sigma : \mathrm{Div}^0(X) \longrightarrow X$. Zeigen Sie, dass σ surjektiv ist.
3. Zeigen Sie, dass σ eine Bijektion induziert $\sigma : \mathrm{Div}^0(X)/\sim\ \longrightarrow X$, wobei
$$\mathrm{Div}^0(X)/\sim\ := \{\text{Divisoren auf } X \text{ von Grad } 0\}/(\text{rationale Äquivalenz}).$$
4. Folgern Sie, dass die Menge der Punkte von X die Struktur einer abelschen Gruppe besitzt.

(5 Punkte)

Aufgabe 11.3: Sei X eine Riemannsche Fläche, z.B. $X = \mathbb{C}$, und $Y \Subset X$ eine relativ kompakte offene Teilmenge und $y \in Y$ ein Punkt. Zeigen Sie, dass es eine meromorphe Funktion f auf Y gibt, die bei y einen Pol besitzt und auf $Y \setminus \{y\}$ holomorph ist.
Wir folgen diesen Schritten:

1. Wir überdecken X mit einer offenen Umgebung U_1 von y sowie $U_2 := X \setminus \{y\}$, $\mathfrak{U} := \{U_1, U_2\}$. Sei $\phi : U_1 \to B_1(0)$ eine Biholomorphie. Nutzen Sie die Funktionen $f_i(z) := z^{-i}$ auf $B_1(0) \setminus \{0\}$, um Kozykel $\tilde{f}_i \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ zu konstruieren.

2. Sei $\mathfrak{U} \cap Y := \{U_1 \cap Y, U_2 \cap Y\}$. Zeigen Sie, dass ab einem hinreichend großen N, das Bild von $\operatorname{span}(\tilde{f}_0, \tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_N)$ unter

$$H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) \longrightarrow H^1(\mathfrak{U}', \mathcal{O})$$

konstante Dimension besitzt.

3. Konstruieren Sie mit dieser Methode einen Korand.

Können wir die Behauptung verschärfen und fordern, dass der Pol bei y sogar Ordnung 1 hat? Geben Sie eine Beweisskizze oder ein Gegenbeispiel.

(7 Punkte)

Aufgabe 11.4: Sei X eine nicht-kompakte Riemannsche Fläche und $Y \Subset Y'$ offene Teilmengen in X. Zeigen Sie, dass

$$A := \operatorname{Im}(H^1(Y', \mathcal{O}) \longrightarrow H^1(Y, \mathcal{O})) = 0$$

gilt. Dazu:

1. Sei X eine nicht-kompakte Riemannsche Fläche und $Y \Subset X$ relativ kompakt. Zeigen Sie, dass es eine holomorphe Funktion $f : Y \to \mathbb{C}$ gib, die auf keiner Zusammenhangskomponente von Y konstant ist.

2. Zeigen Sie, dass $H^1(Y', \mathcal{O})$ ein $\mathcal{O}(Y')$-Modul ist.

3. Nutzen Sie, dass wir wissen, dass das Bild A endlich-dimensional ist. Nutzen Sie (1) und eine Determinante, um eine Funktion zu konstruieren, die auf Y' holomorph und auf keiner Zusammenhangskomponente konstant null, aber die auf Y eingeschränkt bezüglich einer Modulstruktur alles auf Null sendet.

(8 Punkte)