Übungen zur Vorlesung "Funktionentheorie II"
WS16/17 Blatt 12

Ausgabe: 17.1.2017, **Abgabe:** 24.1.2017

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/ws16/ftheorie2/ftheorie1617.htm

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 12.1: Wir wissen bereits, dass es einen Isomorphismus

$$\mathcal{M}(\widehat{\mathbb{C}}) \simeq \mathbb{C}(t)$$

der meromorphen Funktionen auf $\widehat{\mathbb{C}}$ zum rationalen Funktionenkörper $\mathbb{C}(t)$ gibt (Aufgabe 3.2).

1. Nutzen Sie diese Beschreibung, um die Räume $H^0(\widehat{\mathbb{C}}, \mathcal{O}_D)$ für beliebige Divisoren D zu beschreiben.
2. Beschreiben Sie $H^1(\widehat{\mathbb{C}}, \mathcal{O}_{K-D})$ und geben Sie die Paarung

$$H^0(\widehat{\mathbb{C}}, \mathcal{O}_D) \times H^1(\widehat{\mathbb{C}}, \mathcal{O}_{K-D}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

mittels Ihrer Beschreibung konkret an.

(4 Punkte)

Aufgabe 12.2: Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche und $\omega \in \mathcal{M}^{(1)}(X)$ eine meromorphe 1-Form.

1. Beweisen Sie:

$$\sum_{P \in X} \operatorname{res}_P \omega = 0, \tag{1}$$

d.h. die Summe über die Residuen an allen Punkten $P \in X$ ist null.

2. Folgern Sie: Sei f eine meromorphe Funktion auf einer kompakten Riemannschen Fläche und $f \neq 0$. Dann gilt

$$\sum_{P \in X} \operatorname{ord}_P(f) = 0.$$

(6 Punkte)

Aufgabe 12.3: Sei f eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}$. Wir können nun klären wieso wir in der Funktionentheorie I mitunter von Singularitäten und Residuen "im Unendlichen" sprechen mussten:

1. Sei U_0, U_1 die Standardüberdeckung von $\widehat{\mathbb{C}}$ und wir wollen f als Funktion auf U_0 betrachten. Formulieren Sie, unter welchen Bedingungen die 1-Form $\omega := f\mathrm{d}z$ sich zu einer meromorphen 1-Form auf ganz $\widehat{\mathbb{C}}$ fortsetzt.
2. Folgern Sie mit Aufgabe 2 den Residuensatz für rationale Funktionen aus der Funktionentheorie I-Vorlesung, d.h.

$$\sum_{z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}} \mathrm{res}_z(f) = 0$$

   (vgl. Aufgabe 12.3, Teil (2), aus der F-Theorie I Vorlesung SS 2016).

(4 Punkte)

Aufgabe 12.4: Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche von Geschlecht $g(X) = 1$ und $P \in X$ ein fest gewählter Punkt.

1. Zeigen Sie, dass $l(nP) = n$ für alle $n \geq 1$ gilt. (vielleicht können Sie Ihr Argument von Aufgabe 6.2 auf Blatt 6 übernehmen?)
2. Wählen Sie eine Basis $1, x, y$ in $L(3P)$, sodass x einen Pol von Ordnung 2 und y einen Pol von Ordnung 3 bei P besitzt.
3. Zeigen Sie, dass eine nicht-triviale Relation

$$A_1 + A_2x + A_3y + A_4x^2 + A_5xy + A_6y^2 + A_7x^3 = 0$$

   gilt.
4. Zeigen Sie, dass $A_6 \neq 0$ und $A_7 \neq 0$ (wie kann sich der Pol bei P wegheben?)
5. Betrachten Sie $\tilde{x} := -A_6A_7x$ und $\tilde{y} := A_6A_7^2y$. Konstruieren Sie damit eine Abbildung

$$\begin{aligned} h : X \setminus \{P\} &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ Q &\longmapsto (\tilde{x}(Q), \tilde{y}(Q)). \end{aligned}$$

6. Zeigen Sie, dass das Bild von h in der Lösungsmenge des zwei-variabligen Polynoms

$$\tilde{y}^2 + b_1\tilde{x}\tilde{y} + b_3\tilde{y} = \tilde{x}^3 + b_2\tilde{x}^2 + b_4\tilde{x} + b_6$$

   liegt.

(5 Punkte)