# Übungen zur Vorlesung "Funktionentheorie II"
# WS16/17 Blatt 3

**Ausgabe:** 8.11.2016, **Abgabe:** 15.11.2016

---

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/ws16/ftheorie2/ftheorie1617.htm

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

---

**Aufgabe 3.1:** Auf Übungsblatt 1 hatten wir die Riemannsche Fläche

$$\mathbb{P}^1 = \{(z_0, z_1) \mid \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}\}/\sim$$

kennengelernt. Seien $p, q \in \mathbb{C}[z_0, z_1]$ zwei homogene Polynome gleichen Grades und $q \neq 0$. Zeigen Sie, dass

$$f([z_0 : z_1]) := \frac{p(z_0, z_1)}{q(z_0, z_1)}$$

eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{P}^1$ definiert.

(4 Punkte)

**Aufgabe 3.2:** In Aufgabe 1.1. auf Übungsblatt 1 hatten wir gezeigt, dass jedes Polynom eine meromorphe Funktion auf $\widehat{\mathbb{C}}$ induziert.

1. Zeigen Sie, dass diese Konstruktion sich zu einem Körper-Homomorphismus

$$\varphi : \mathbb{C}(t) \longrightarrow \mathcal{M}(\widehat{\mathbb{C}})$$

   fortsetzen lässt, der einer rationalen Funktion eine meromorphe Funktion zuordnet.

2. Zeigen Sie, dass $\varphi$ ein Isomorphismus ist.

In prägnanter Form formuliert man diese Aussagen üblicherweise als "Jede meromorphe Funktion auf $\widehat{\mathbb{C}}$ ist rational".

(4 Punkte)

**Aufgabe 3.3:** Sei $X$ eine Riemannsche Fläche. In der Vorlesung hatten wir gesehen, dass jede meromorphe Funktion $f \in \mathcal{M}(X)^{\times}$ einen zugehörigen Hauptdivisor besitzt:

$$(f) = \sum a_i P_i.$$

1. Beweisen Sie, dass für $X = \widehat{\mathbb{C}}$ jeder Divisor $D = \sum b_i P_i$, der $\sum b_i = 0$ erfüllt, ein Hauptdivisor ist.

2. Sei $\Omega$ ein Gitter. Zeigen Sie mit einem Beispiel, dass Aussage (1) für $X = \mathbb{C}/\Omega$ *falsch* ist.

3. Entwickeln Sie mit Ihrer Kenntnis über elliptische Funktionen (z.B. aus der Funktionentheorie I Vorlesung) ein geeignetes Kriterium, was Aussage (2) ersetzt, d.h. eine Aussage der Form: Ein Divisor $D = \sum b_i P_i$ auf $X = \mathbb{C}/\Omega$ ist ein Hauptdivisor dann und nur dann wenn...

(6 Punkte)

**Aufgabe 3.4:** Sei $f : X \to Y$ eine nicht-konstante holomorphe Abbildung Riemannscher Flächen. Wir definieren eine Abbildung

$$\begin{aligned} f^* : \mathcal{M}(Y) &\longrightarrow \mathcal{M}(X) \\ g &\longmapsto g \circ f, \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} f^* : \mathrm{Div}(Y) &\longrightarrow \mathrm{Div}(X) \\ P &\longmapsto \sum_{Q \in f^{-1}(P)} v(Q) \cdot Q, \end{aligned}$$

wobei $\mathrm{Div}(-)$ die Menge der Divisoren auf einer Riemannschen Fläche bezeichnet und $v$ die Vielfachheit unter $f$. Die Abbildungen $f^*$ bezeichnet man als *Pullback* oder *Zurückziehung* (von Funktionen bzw. Divisoren) entlang $f$.

1. Beweisen Sie, dass $f^*(g) = (f^*g)$. In Worten: Der Pullback eines Hauptdivisors ist der Hauptdivisor des Pullbacks der Funktion.

2. Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(X)^{\times}/\mathcal{O}(X)^{\times} &\hookrightarrow \mathrm{Div}(X) \\ f &\mapsto (f) \end{aligned}$$

   ein wohldefinierter und injektiver Gruppenhomomorphismus ist.

(5 Punkte)