# Übungen zur Vorlesung “Funktionentheorie II” WS16/17 Blatt 5

**Ausgabe:** 22.11.2016, **Abgabe:** 29.11.2016

---

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/ws16/ftheorie2/ftheorie1617.htm

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

---

Sei $X$ ein topologischer Raum und $U$ eine offene Teilmenge. Für jede Garbe $\mathcal{F}$ auf $X$ definieren wir ihre *Einschränkung auf* $U$ durch

$$\mathcal{F}\mid_U(W) := \mathcal{F}(U \cap W) \qquad \text{für } W \text{ offene Menge in } U.$$

Ohne dies zu beweisen, behaupten wir, dass $\mathcal{F}\mid_U$ eine Garbe auf $U$ definiert.

**Aufgabe 5.1:** (Verkleben von Morphismen von Garben) Sei $X$ ein topologischer Raum, $X = U \cup V$ eine offene Überdeckung, sowie $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ Garben auf $X$.
Zeigen Sie: Falls

$$\varphi_U : \mathcal{F}\mid_U \to \mathcal{G}\mid_U \qquad \text{und} \qquad \varphi_V : \mathcal{F}\mid_V \to \mathcal{G}\mid_V$$

Morphismen von Garben sind, und die Morphismen auf dem Schritt übereinstimmen, d.h.

$$\varphi_U\mid_V = \varphi_V\mid_U : \mathcal{F}\mid_{U\cap V} \to \mathcal{G}\mid_{U\cap V},$$

dann existiert ein Morphismus $\tilde{\varphi} : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ mit $\tilde{\varphi}\mid_U = \varphi_U$ und $\tilde{\varphi}\mid_V = \varphi_V$. Ist $\tilde{\varphi}$ notwendigerweise eindeutig bestimmt?

(4 Punkte)

**Aufgabe 5.2:** (Verkleben von Garben) Sei $X = U \cup V$ eine offene Überdeckung von $X$ durch zwei Mengen. Sei $\mathcal{F}$ eine Garbe auf $U$ und $\mathcal{G}$ eine Garbe auf $V$.

1. (Existenz) Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:
   - Es existiert eine Garbe $\mathcal{H}$ auf ganz $X$, sodass $\mathcal{H}\mid_U = \mathcal{F}$ und $\mathcal{H}\mid_V = \mathcal{G}$.
   - Es existiert ein Isomorphismus von Garben $\varphi : \mathcal{F}\mid_{U\cap V} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}\mid_{U\cap V}$

   Gegeben $\varphi$, so nennen wir $\mathcal{H}$ eine *Verklebung* der Garben $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$.

2. (Eindeutigkeit) Zeigen Sie, falls $\mathcal{H}$ und $\mathcal{H}'$ beides Verklebungen sind, dass ein kanonischer Isomorphismus
$$\mathcal{H} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}'$$
existiert. Zeigen Sie auch umgekehrt, dass bei gegebener Verklebung eine kanonische Isomorphie $\varphi : \mathcal{F} \mid_{U\cap V} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G} \mid_{U\cap V}$ existiert.

(5 Punkte)

**Aufgabe 5.3:** Wir betrachten die Riemannsche Fläche $X = \widehat{\mathbb{C}}$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{O}_D$ und $\mathcal{O}_{D'}$ (für Divisoren $D, D'$) isomorph sind, dann und nur dann wenn sie den gleichen Grad $d$ besitzen, d.h.

$$\deg D = \deg D'.$$

Wir können fortan die praktische Notation $\mathcal{O}(d)$ für diese Isomorphieklasse von Geradenbündeln benutzen.

(5 Punkte)

**Aufgabe 5.4:** Wir betrachten weiter die Riemannsche Fläche $X = \widehat{\mathbb{C}}$. Konstruieren Sie einen Isomorphismus von Geradenbündeln

$$\psi : \mathcal{O}_D \xrightarrow{\sim} \Omega$$

für einen geeigneten Divisor $D$.

(Sie dürfen weiterhin benutzen, dass jede 1-Form auf $\mathbb{C}$ die Form $f\mathrm{d}z$ besitzt, für $f$ eine holomorphe Funktion.)

(Tipp: $D = -2\infty$)

(4 Punkte)