Übungen zur Vorlesung “Funktionentheorie II” WS16/17 Blatt 7

Ausgabe: 6.12.2016, **Abgabe:** 13.12.2016

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/ws16/ftheorie2/ftheorie1617.htm

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 7.1: Sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{F}$ eine Garbe. Ist $\mathfrak{U} = (U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung, die

$$H^1(U_i, \mathcal{F}) = 0 \qquad \text{für alle } i \in I$$

erfüllt, so heißt $\mathfrak{U}$ eine H^1-*Leray-Überdeckung* für $\mathcal{F}$. Zeigen Sie, dass dann für $p = 0, 1$ die Isomorphie

$$H^p(X, \mathcal{F}) \cong H^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$$

gilt.

Ausblick: Später werden wir sehen, dass für die Kreisscheibe $X := B_r(0)$ die Identitäten $H^1(X, \mathbb{Z}) = 0$ und $H^1(X, \mathcal{O}) = 0$ gelten.

(5 Punkte)

Aufgabe 7.2: Seien C^n für alle $n \in \mathbb{Z}$ abelsche Gruppen (oder für alle n Vektorräume). Der Exponent n bezeichnet hier lediglich einen Index und nicht ein Produkt oder dergleichen. Seien weiter $d^n : C^n \to C^{n+1}$ Gruppenhomomorphismen und es gelte $d^{n+1} \circ d^n = 0$. Dann heißt das Paar $(C^\bullet, d^\bullet)$ ein *Komplex*, und

$$H^n(C^\bullet) := \frac{\ker(d^n : C^n \longrightarrow C^{n+1})}{\operatorname{im}(d^{n-1} : C^{n-1} \longrightarrow C^n)}$$

seine *n-te Kohomologie*. Sind $(C^\bullet, d^\bullet)$ und $(D^\bullet, \partial^\bullet)$ Komplexe, so heißt $f^\bullet = (f^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ mit $f^n : C^n \to D^n$ sodass $f^{n+1} \circ d^n = \partial^n \circ f^n$, ein *Morphismus von Komplexen*.

1. Sei X ein topologischer Raum, $\mathfrak{U}$ eine offene Überdeckung und $\mathcal{F}$ eine Garbe auf X. Zeigen Sie, dass der Cech Kokettenkomplex $(C^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{F}), \delta^\bullet)$ ein Beispiel für einen Komplex im obigen Sinne ist.

2. Zeigen Sie, dass ein Morphismus $f^\bullet : (C^\bullet, d^\bullet) \to (D^\bullet, \partial^\bullet)$ einen wohldefinierten Gruppenhomomorphismus

   $$H^n(f^\bullet) : H^n(C^\bullet) \longrightarrow H^n(D^\bullet) \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{Z}$$

   induziert.

3. Seien $(C^\bullet, d^\bullet)$ und $(D^\bullet, \partial^\bullet)$ Komplexe und $f^\bullet, g^\bullet : C^\bullet \to D^\bullet$ Morphismen von Komplexen. Seien $h^n : C^n \to D^{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ Gruppenhomomorphismen und es gelte
$$f^n - g^n = \partial^{n-1} \circ h^n + h^{n+1} \circ d^n.$$
Dann heißt $(h^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ eine *Homotopie* zwischen f und g. Die Morphismen f und g heißen *homotop*, falls eine Homotopie zwischen ihnen existiert. Zeigen Sie: Sind f und g homotop, so induzieren sie den gleichen Morphismus in der Kohomologie, d.h.
$$H^n(f^\bullet) = H^n(g^\bullet).$$

Kontext: Homotopien sind interessant, um Aussagen wie Lemma 4.3 aus dem Skript zu beweisen.

(5 Punkte)

Aufgabe 7.3: Sei $(V^\bullet, d^\bullet)$ ein Komplex von endlich-dimensionalen Vektorräumen und sei $V^n \neq 0$ nur für endlich viele $n \in \mathbb{Z}$. Beweisen Sie, dass
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n \dim V^n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n \dim H^n(V^\bullet).$$

(4 Punkte)

Aufgabe 7.4: Sei X eine Riemannsche Fläche. Aus der exakten Garbensequenz
$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^\times \longrightarrow \mathcal{M}^\times \longrightarrow \mathrm{Div} \longrightarrow 0$$
bekommen wir einen kanonischen Morphismus
$$\partial : H^0(X, \mathrm{Div}) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}^\times).$$
Weiter kennen wir
$$\begin{aligned} \mu : \mathrm{Div}(X)/\sim \hookrightarrow \mathrm{Pic}\, X \qquad & \text{(Satz 3.8 aus dem Skript)} \\ \eta : \mathrm{Pic}\, X \cong H^1(X, \mathcal{O}^\times) \qquad & \text{(Korollar 4.6 aus dem Skript)} \end{aligned}$$
Zeigen Sie, dass $\partial = \eta \circ \mu : \mathrm{Div}(X) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}^\times)$.

(5 Punkte)