Übungen zur Vorlesung "Funktionentheorie II"
WS16/17 Blatt 8

Ausgabe: 13.12.2016, **Abgabe:** 20.12.2016

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/ws16/ftheorie2/ftheorie1617.htm

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 8.1: Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Seien $f, g \in \mathcal{E}(U)$ so dass die Komposition $f \circ g$ definiert ist. Dann gelten die folgenden Versionen der Kettenregel:

1. $$\frac{\partial f}{\partial z}(f \circ g) = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\frac{\partial \overline{g}}{\partial z}$$

2. $$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(f \circ g) = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial \overline{z}} + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\frac{\partial \overline{g}}{\partial \overline{z}}.$$

Suchen Sie sich eine dieser Formeln aus und geben Sie einen Beweis. Zeigen Sie, wie man aus (2) die folgende Aussage folgern kann: Sind f und g holomorph, so ist $f \circ g$ holomorph.

(4 Punkte)

Aufgabe 8.2: Wir wollen ein wenig mit nicht notwendigerweise holomorphen Differentialformen rechnen:

1. Sei $U := \mathbb{C} - 0$. Berechnen Sie
$$\omega = d\log(|z|^2)$$
und geben Sie explizit die Zerlegung von ω in eine $(0,1)$- sowie $(1,0)$-Form an. (Tipp: $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$)

2. Sei $z \in \mathbb{C}$ und $U := \mathbb{C} - \{z\}$. Für $f \in \mathcal{E}(U)$ definieren wir eine 1-Form $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(U)$ durch
$$\eta := \frac{f(w)}{w - z}\,\mathrm{d}w.$$
Zeigen Sie, dass
$$d\eta = -\frac{\partial f}{\partial \overline{w}}\frac{1}{w - z}\,\mathrm{d}w \wedge \mathrm{d}\overline{w}.$$

(5 Punkte)

Aufgabe 8.3: Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet mit $\overline{B_1(0)} \subset G$ und $f \in \mathcal{E}(G)$. Wir wollen beweisen, dass für alle $z \in B_1(0)$ die Formel

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \overline{B_1(0)}} \frac{f(w)}{w-z} \,\mathrm{d}w + \frac{1}{2\pi i} \int_{B_1(0)} \frac{\partial f}{\partial \overline{w}} \frac{1}{w-z} \,\mathrm{d}w \wedge \mathrm{d}\overline{w}$$

gilt. Dies ist offenbar eine Verschärfung der *Cauchyschen Integralformel* aus der Funktionentheorie I. Wir beweisen diese Formel in den folgenden Schritten.

1. Zerlegen Sie für $\varepsilon > 0$ hinreichend klein, G in $\overline{B_\varepsilon(z)}$ und das Komplement. Wenden Sie den Satz von Stokes auf

$$\omega := \frac{f(w)}{w-z} \,\mathrm{d}w, \qquad \omega \in \mathcal{E}^{(1)}(G - \overline{B_\varepsilon(z)})$$

   an.

2. Lassen Sie ε gegen null gehen. (Tipp: Polarkoordinaten um z)

Hinweis: Man kann sowohl im Beweis der klassischen Cauchy Integralformel in der Funktionentheorie I sowie aus dem Beweis des Dolbeault Lemmas aus der Vorlesung Inspiration sammeln.

(8 Punkte)

Eine vierte Aufgabe gibt es diese Woche nicht, lediglich als Bonus-Aufgabe:

Bonus-Aufgabe 8.4: Sei R ein kommutativer Ring mit Eins. Sei M ein freier R-Modul von endlichem Rang r. Wir definieren

$$T^k(M) := M \otimes_R \cdots \otimes_R M \qquad \text{(mit } k \text{ Faktoren)}$$

für $k \geq 1$ und $T^0(M) := R$. Dies ist in natürlicher Weise wieder ein R-Modul.

1. Zeigen Sie, dass $T^k(M)$ ein freier R-Modul von endlichem Rang ist. Geben Sie eine Formel für diesen Rang an.

2. Sei $I^k(M) \subset T^k(M)$ der R-Untermodul, der von den Tensoren

$$\{m_1 \otimes \cdots \otimes m_k \mid \text{es gibt } 0 \leq i < j \leq k \text{ sodass } m_i = m_j\}$$

   erzeugt wird. Sei

$$\textstyle\bigwedge^k M := T^k(M)/I^k(M)$$

   der Quotientenmodul. Zeigen Sie, dass $\bigwedge^k M$ frei von endlichem Rang ist und geben Sei eine Formel für den Rang an.

3. Zeigen Sie, dass diese Konstruktion für $k = 2$ zu der Definition aus dem Skript (Definition 5.6) äquivalent ist.

4. Sei $A : M \to M$ ein R-Modul Homomorphismus. Dieser induziert vermöge

$$m_1 \otimes m_2 \otimes \cdots \otimes m_r \mapsto Am_1 \otimes Am_2 \otimes \cdots \otimes Am_r$$

einen R-Modul Homomorphismus $\bigwedge^r M \to \bigwedge^r M$. Dieser wird mit $\bigwedge^r A$ bezeichnet. Da $\bigwedge^r M$ ein freier R-Modul von Rang 1 ist, wird ein beliebiges Basiselement $\beta \in \bigwedge^r M$ auf ein Vielfaches $\gamma_A \cdot \beta$ abgebildet. Zeigen Sie, dass

$$\gamma_A = \det A.$$

(5 Punkte)