Bonus-Aufgaben zur Vorlesung
“Funktionentheorie II”
WS 2016/17

Ausgabe: 21.12.2016, **Abgabe:** 10.1.2016

Bonus-Aufgabe 10.1: Was ist die Definition einer Riemannschen Fläche?

Bonus-Aufgabe 10.2: Geben Sie zwei kompakte Riemannsche Flächen an, die nicht isomorph sind. Skizzieren Sie eine knappe Begründung.

Bonus-Aufgabe 10.3: Geben Sie eine holomorphe geschlossene 1-Form auf $\mathbb{C}$ an.

Bonus-Aufgabe 10.4: Formulieren Sie die Aussage des Lemmas von Dolbeault.

Bonus-Aufgabe 10.5: Sei $\mathfrak{U}$ eine offene Überdeckung eines topologischen Raums X und $\mathcal{F}$ eine Garbe. Geben Sie die Definition von $Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ an.

Bonus-Aufgabe 10.6: Definieren Sie den Halm einer Garbe.

Bonus-Aufgabe 10.7: Sei $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ eine exakte Sequenz von Garben. Erklären Sie, wie die Randabbildung $H^0(X, \mathcal{H}) \to H^1(X, \mathcal{F})$ konkret berechnet wird.

Bonus-Aufgabe 10.8: Sei X eine Riemannsche Fläche, $p \in X$ ein Punkt und z eine lokale Koordinate bei p. Geben Sie die Definition von $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ in dieser Koordinate an.

Bonus-Aufgabe 10.9: Beantworten Sie die folgenden Fragen mit “Ja” oder “Nein” und geben Sie eine knappe Begründung oder ein Gegenbeispiel (keine kompletten Beweise).

1. Besitzt $\mathbb{C}$ die Struktur einer Riemannschen Fläche?
2. Das Polynom $f(z) = z^3$ auf $\mathbb{C}$ kann zu einer holomorphe Abbildung $\tilde{f} : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ fortgesetzt werden. Ist $\tilde{f}$ unverzweigt?
3. Existiert eine nicht-konstante holomorphe Abbildung $f : \mathbb{C}/\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{C}$?
4. Existiert eine nicht-konstante holomorphe Abbildung $f : \mathbb{C}/\mathbb{Z}^2 \to \widehat{\mathbb{C}}$?

5. Bilden die meromorphen Funktionen auf einer Riemannschen Fläche stets einen Körper?

6. Ist auf $\widehat{\mathbb{C}}$ jeder Divisor ein Hauptdivisor?

7. Ist die Summe zweier Hauptdivisoren $(f) + (g)$ stets immer selbst ein Hauptdivisor?

8. Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche. Ist dann jede meromorphe Funktion auf X zwangsläufig konstant?

9. Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche und f eine meromorphe Funktion auf X, die an unendlich vielen Punkten auf X eine Nullstelle besitzt. Ist f dann zwangsläufig konstant null?

10. Existiert auf $\widehat{\mathbb{C}}$ eine globale holomorphe 1-Form, die nicht konstant null ist?

11. Sei Γ ein Gitter. Existiert auf $\mathbb{C}/\Gamma$ eine globale holomorphe 1-Form, die nicht konstant null ist?

12. Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche und D ein Divisor von Grad gleich $2g - 2$, wobei g das Geschlecht von X bezeichnet. Gilt dann zwangsläufig $D = K$?

13. Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche und D ein Divisor von Grad -2. Gilt dann immer $H^0(X, \mathcal{O}_D) = 0$.

14. Sei $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ eine exakte Sequenz von Garben. Gilt dann für jede offene Menge U stets, dass

$$0 \to \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U) \to \mathcal{H}(U) \to 0$$

auch exakt ist?

15. Es seien Morphismen von Garben $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G} \xrightarrow{g} \mathcal{H}$ gegeben, sodass für alle offenen Menge U stets die Sequenz

$$0 \to \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U) \to \mathcal{H}(U) \to 0$$

exakt ist. Ist dann $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ zwangsläufig eine exakte Sequenz von Garben?

16. Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche mit $\operatorname{Pic} X = 0$ und $H^1(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^n$ für irgendeine Zahl n. Muss dann schon $n = 0$ gelten?

17. Existiert eine Riemannsche Fläche X mit $H^0(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2$?

18. Existiert eine Riemannsche Fläche X mit $H^0(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$?

19. Existiert ein topologischer Raum X mit $H^0(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2$?

20. Existiert ein topologischer Raum X mit $H^0(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$?

21. Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche, auf der jeder Divisor von Grad null ein Hauptdivisor ist. Gilt dann notwendigerweise $X \simeq \widehat{\mathbb{C}}$?

22. Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche und D ein Divisor mit $l(nD) = n(n+1)$ für alle hinreichend großen n. Ist das überhaupt möglich?

23. Erfüllt jede holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ die Gleichung $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$?

24. Ist die Form $\omega = \frac{1}{z^2}\,\mathrm{d}z$ auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ exakt?

25. Sei $f(z) := z \sin(z)$ auf $\mathbb{C}$. Ist $\omega = \sin(z)\,\mathrm{d}z + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\,\mathrm{d}\bar{z}$ dann eine $(1,0)$-Form?

26. Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche, $p \in X$ ein Punkt, und $f : X - \{p\} \to \widehat{\mathbb{C}}$ eine holomorphe Funktion, die in einer (punktierten) Umgebung von p beschränkt bleibt. Folgt dann, dass sich f holomorph in p fortsetzen lässt?

27. Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche, $p \in X$ ein Punkt, und $f : X - \{p\} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Existiert dann stets eine meromorphe Fortsetzung $\tilde{f} : X \to \widehat{\mathbb{C}}$?

28. Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche. Ist jede stetig reellwertige Funktion auf X notwendigerweise konstant?

29. Besitzt die Riemannsche Fläche $\mathbb{C}/\Gamma$ eine globale $(0,1)$-Form abgesehen von der Nullform?

pro Frage:

(0.5 Punkte)