SEMINAR "KNOTENTHEORIE"
WS 2017/18

MATTHIAS WENDT

Mathematische Knoten sind stetige injektive Abbildungen $S^1 \hookrightarrow S^3$ bzw. in höherdimensionaler Verallgemeinerung $S^n \hookrightarrow S^{n+2}$. Die Knotentheorie beschäftigt sich mit der Frage nach Invarianten, die direkt aus einem Knotendiagramm berechenbar sind und mit denen man verschiedene Knoten voneinander unterscheiden kann. Das Ziel des Seminars ist es, ein paar der topologischen und algebraischen Invarianten von Knoten kennenzulernen. In diesem Zusammenhang geht es natürlich auch darum, einige Grundbegriffe der algebraischen Topologie (Fundamentalgruppen, Homologie) kennenzulernen bzw. zu vertiefen. Ein paar algebraische Ausflüge zu Zopfgruppen, Hecke-Algebren und polynomialen Knoten runden das Seminar ab.

Zeit: jeweils Donnerstags 14-16

Ort: SR125, Eckerstr. 1

Voraussetzungen: Grundkenntnisse Algebra (Gruppen, Ringe, Körper, evtl. Darstellungen), Grundkenntnisse Topologie für einige Vorträge.

Vorbesprechung: letzte Semesterwoche

Liste der Vorträge.

(1) *Termin 19. Okt*; Einführung: Zöpfe, Links, Knoten (letztere für allgemeine Dimensionen); Definitionen und Beispiele; Äquivalenzrelationen: (orientierte) Äquivalenz, Umgebungsisotopie (ambient isotopy)
[Rol03, Kapitel 1]

(2) *Termin 26. Okt*; Fundamentalgruppe: kurze Einführung Überlagerungstheorie, Definition Fundamentalgruppe als Decktransformationen der universellen Überlagerung, alternative Definition über Pfade und Homotopie, Äquivalenz beider Definitionen
[Hat02, Kapitel 1.1, 1.3]

(3) *Termin 2. Nov*; erste Invariante: Fundamentalgruppe von Knotenkomplementen. Amalgame, Satz von Seifert–van Kampen. Beispiel Torusknoten.
[Hat02, Kapitel 1.2] für Seifert–van Kampen, [Rol03, Kapitel 3.A-C] für Knotenkomplemente, Torusknoten

(4) *Termin 9. Nov*; Wirtinger-Präsentation für Knoten und Links (mit Beweis und Beispielen). (evtl. Dehn-Präsentation; Beziehung zur Wirtinger-Präsentation)
[Rol03, Kapitel 3.D, 3.F]

(5) *Termin 16.& 23. Nov*; Dehn-Lemma: nur der Unknoten hat triviale Knotengruppe (fortgeschritten, Grundkenntnisse Topologie erforderlich). Einführung PL-Topologie (Zellkomplexe) und Beweisskizze des Dehn-Lemmas nach Papakyriakopoulos.
[Rol03, Appendix B], s. auch [SW58] (evtl. zwei Vorträge)

(6) *Termin 30. Nov*; kurze Einführung simpliziale resp. zelluläre Homologie, homologische Algebra, Kettenkomplexe, Mayer–Vietoris-Sequenz.
[Hat02, Kapitel 2.1,2.2]
(7) *Termin 7. Dez*; Seifert-Flächen, Konstruktion, abelsche Überlagerung, linking number. Beispiele.
[Rol03, Kapitel 5.A,C,D]
(8) *Termin 14. Dez*; zweite Invariante: Alexander-Modul und Alexander-Polynom, Beziehung zur Fundamentalgruppe (untere zentrale Reihe) Beispiel-Rechnungen
[Rol03, Kapitel 7.A,B,D]
(9) *Termin 21.Dez*; Matrizen-Invarianten, Alexander-Matrizen für Präsentation, Torsions-Invarianten
[Rol03, Kapitel 8.A-D]
(10) *Termin 11.Jan*; Auswahl an Aussagen zu höher-dimensionalen Knoten, Variationen zum bisherigen Seminarinhalt.
mögliche Grundlagen [Rol03, 3.J/K, 7.G/H, 11] (freie Wahl)
(11) *Termin 18.Jan*; Definition Zopf-Gruppe, Iwahori–Hecke-Algebra, Darstellungen der Iwahori–Hecke-Algebra (Burau-Darstellung). (bei Interesse: Wort- bzw. Konjugationsproblem, Zopfgruppen-Kryptographie, Garside-Normalform)
[Big06, KT08]
(12) *Termin 25.Jan*; Definition Jones-Polynom als Knoteninvariante, ausgehend von Darstellungen der Iwahori–Hecke-Algebra.
[Big06], [Kaw96, Kapitel 8/9].
(13) *Termin 1. Feb*; Whitehead-Link, Whitehead-Mannigfaltigkeit in geometrischer Topologie als zusammenziehbare 3-Mannigfaltigkeit, die nicht homöomorph zum $\mathbb{R}^3$ ist
[Whi35], s. auch
`wildandnoncompactknots.wordpress.com/tag/whitehead-manifolds/`
(14) *Termin 8. Feb*: Darstellbarkeit von Knoten durch polynomiale Abbildungen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, Satz von Shastri [Sha92]; s.a. [DO'S06] für weitere Beispiele polynomialer Darstellungen von Knoten. (M. Wright: Constructing polynomial knots (2006) diskutiert einen Algorithmus zum Finden polynomialer Darstellungen. Interessantes BSc-Thema)

Literatur

[Big06] S. Bigelow. Braid groups and Iwahori–Hecke algebras. In: Proc. Symp. Pure Math 74 (2006). 285–299. `http://web.math.ucsb.edu/~bigelow/job/10braidhecke.pdf`
[DO'S06] A. Durfee und D. O'Shea. Polynomial knots. arXiv:math/0612803.
[Hat02] A. Hatcher. Algebraic topology. Cambridge University Press, 2002. `https://www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/ATpage.html`,
[Kaw96] A. Kawauchi. A survey of knot theory. Birkhäuser 1996.
[KT08] C. Kassel und V. Turaev. Braid groups. Graduate Texts in Mathematics 247, Springer 2008.
[Rol03] D. Rolfsen. Knots and links. Amer. Math. Soc., 1976 (reprint 2003).
[Sha92] A. R. Shastri. Polynomial representations of knots. Tohoku Math. J. 44 (1992), 11–17.
[SW58] A. Shapiro und J.H.C. Whitehead. A proof and extension of Dehn's lemma. Bull. Amer. Math. Soc. 64 (1958), 174–178.
[Whi35] J.H.C. Whitehead. A certain open manifold whose group is unity. Quaterly J. Math. 6 (1935), 268–279.