“Lineare Algebra”
WS 2018/19 — Übungsblatt 11

Ausgabe: 17.1.2019, **Abgabe**: 25.1.2019

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:
`http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/ws18/la.html`
Sie erhalten zusätzlich 2 Punkte fur das Ausfüllen des Online-Tests. Diese sind Teil der Pflichtwertung. Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 11.1: Berechnen Sie die Eigenwerte der folgenden Matrix $A \in M_4(\mathbb{F}_3)$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(3 Punkte)

Aufgabe 11.2: Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrix $A \in M_3(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -5 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(5 Punkte)

Aufgabe 11.3: Seien $A \in M_n(k)$, $B \in M_{n\times m}(k)$ und $C \in M_m(k)$. Berechnen Sie das charakteristische Polynom der Matrix $M \in M_{n+m}(k)$.

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 11.4: Sei k ein Körper in dem $2 \neq 0$ gilt und $A \in M_n(k)$ mit $A^2 = E_n$. Zeigen Sie:

1. Die einzigen Eigenwerte von A sind -1 und 1.
2. Wenn $A \neq E_n$, dann ist -1 ein Eigenwert von A (*Hinweis:* Betrachten Sie Vektoren der Form $Av - v$).

(3 Punkte)

Bonus-Aufgabe 11.5: : (die Fibonacci-Zahlen) Die n-te Fibonacci-Zahl F_n ist definiert durch

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1 \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ für } n \geq 2.$$

Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

i) Geben Sie die ersten 5 Fibonacci-Zahlen an.

ii) Zeigen Sie, dass $A^n = \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix}$.

iii) Berechnen Sie die Eigenwerte λ_1 und λ_2 von A und finden Sie die Basiswechselmatrix $M \in M_2(\mathbb{R})$, so dass $MAM^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

iv) Benutzen Sie ii) und iii), um die Formel

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

zu zeigen.

Bemerkung: Die Zahl $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ *heißt goldener Schnitt.*

(8 Punkte)