“Lineare Algebra”
WS 2018/19 — Übungsblatt 4

Ausgabe: 8.11.2018, **Abgabe:** 16.11.2018

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/ws18/la.html

Sie erhalten zusätzlich 2 Punkte für das Ausfüllen des Online-Tests. Diese sind Teil der Pflichtwertung. Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 4.1:
Sei k ein Körper, V ein k-Vektorraum, und seien $U, W \subset V$ k-Untervektorräume. Untersuchen Sie, ob die folgenden Mengen k-Untervektorräume von V sind:

$$U \cap W, \quad U \cup W, \quad U + W = \{v_1 + v_2 \mid v_1 \in U, v_2 \in W\}$$

(3 Punkte)

Aufgabe 4.2:
Diese Aufgabe setzt Aufgabe 3.4 fort.

1. Zeigen Sie, dass das Tripel $(\mathfrak{P}(X), \triangle, \cap)$ einen kommutativen Ring bildet.
2. Handelt es sich um einen Körper?
3. Geben Sie $\mathfrak{P}(X)$ die Struktur eines Vektorraumes über $\mathbb{F}_2$.

(6 Punkte)

Aufgabe 4.3:
Betrachte die Teilmenge K der reellen 2×2-Matrizen der Form

$$K := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

1. Beweisen Sie, dass K (mit der Addition und Multiplikation von Matrizen) ein Körper ist.
2. Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}$ via $a \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ als Teilkörper von K aufgefasst werden kann.

(bitte wenden)

3. Finden Sie ein Element $M \in K$ mit $M^2 = -1$.

(4 Punkte)

Aufgabe 4.4: Betrachten Sie den $\mathbb{F}_2$-Vektorraum $K := \{(x,y)|x,y \in \mathbb{F}_2\}$ und die Einbettung

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{F}_2 & \hookrightarrow & K \\ x & \mapsto & (x,0) \end{array}$$

Wir identifizieren $\mathbb{F}_2$ mit seinem Bild in K. Jedes Element von K lässt sich also als $a + bT$ schreiben mit $a, b \in \mathbb{F}_2$ und $T := (0,1)$.
Können Sie, ähnlich zum Fall der komplexen Zahlen, eine Multiplikation auf K definieren, mit der K zu einem Körper mit 4 Elementen wird? Begründen Sie Ihre Antwort. Ein vollständiger Beweis wird nicht verlangt.
Hinweis: Versuchen Sie eine sinnvolle Multiplikationstafel

$\cdot$	1	T	$1+T$
1			
T			
$1+T$			

aufzustellen.

(4 Punkte)

Bonus-Aufgabe 4.5: Wir betrachten die Menge

$$\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} |\alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\}$$

mit der Addition und Multiplikation von Matrizen. Zeigen Sie:

1. $\mathbb{H}$ ist ein Schiefkörper.

2. Die Elemente

$$I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

erfüllen die Rechenregeln

$$I^2 = J^2 = K^2 = -1 \quad I \cdot J = -J \cdot I = K.$$

$\mathbb{H}$ heißt Schiefkörper der Hamiltonschen Quaternionen. Jedes Element von $\mathbb{H}$ ist eindeutig von der Form $a+bI+cJ+dK$ mit $a,b,c,d \in \mathbb{R}$. Die Rechenregeln in 2. legen daher die Multiplikation eindeutig fest.

(6 Punkte)