“Lineare Algebra”
WS 2018/19 — Übungsblatt 8

Ausgabe: 6.12.2018, **Abgabe:** 14.12.2018

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/ws18/la.html

Sie erhalten zusätzlich 2 Punkte für das Ausfüllen des Online-Tests. Diese sind Teil der Pflichtwertung. Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 8.1:
Seien A, B quadratische Matrizen, so dass $B \cdot A = E_n$. Zeigen Sie:

$$A \cdot B = E_n.$$

(2 Punkte)

Aufgabe 8.2:
Sei k ein Körper. In Aufgabe 7.1 haben Sie gezeigt, dass die Abbildung “Spur”

$$\begin{aligned} \mathrm{tr} : M_{n\times n}(k) &\to k \\ M &\mapsto \sum_{i=1}^{n} m_{ii} \end{aligned}$$

linear ist. Berechnen Sie für $n \geq 1$ die Dimension des k-Vektorraumes der $n \times n$-Matrizen, deren Spur 0 ist. Benutzen Sie dazu die Dimensionsformel.

(3 Punkte)

Aufgabe 8.3:
Sei k ein Körper und V ein k-Vektorraum, und $p : V \to V$ ein **Projektor**, d.h. eine lineare Abbildung, für die $p \circ p = p$ gilt. Geben Sie explizit einen linearen Isomorphismus

$$V \to \mathrm{Kern}(p) \oplus \mathrm{Bild}(p)$$

an, und zeigen Sie, dass es ein Isomorphismus ist.

(4 Punkte)

(bitte wenden)

Aufgabe 8.4:

1. Sei k entweder $\mathbb{F}_2$ oder $\mathbb{R}$. Sei $V_4 \subset k[X]$ der k-Untervektorraum der Polynome vom Grad höchstens 4. Bestimmen Sie (für beide Fälle von k) eine möglichst einfache Basis von V_4, und berechnen Sie die darstellende Matrix von $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ (formale Ableitung) in dieser Basis.

2. Betrachten Sie den reellen Vektorraum $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Bestimmen Sie möglichst einfache Basen von V und $\mathbb{R}$ und berechnen Sie die darstellende Matrix von $\mathrm{tr} : M \mapsto \sum_i m_{ii}$ bzgl. dieser Basen.

3. Betrachten Sie den reellen Unterraum V des Raumes der differenzierbaren Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welcher durch sin und cos aufgespannt wird. Beweisen Sie, dass die Ableitung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ zu einer linearen Abbildung $V \to V$ einschränkt, und bestimmen Sie die darstellende Matrix dieser Abbildung in der Basis $(\sin, \cos)$.

(6 Punkte)

Bonus-Aufgabe 8.5:
Es seien U_1 und U_2 Untervektoräume eines k-Vektorraums V. Zeigen Sie:

1. $U_1/(U_1 \cap U_2) \cong (U_1 + U_2)/U_2$.

2. Für $U_1 \subset U_2$ gilt: $(V/U_1)/(U_2/U_1) \cong V/U_2$.

Geben Sie jeweils einen natürlichen Isomorphismus an.

(6 Punkte)