"Lineare Algebra"
WS 2018/19 — Übungsblatt 9

Ausgabe: 13.12.2018, **Abgabe:** 21.12.2019

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/ws18/la.html

Sie erhalten zusätzlich 2 Punkte für das Ausfüllen des Online-Tests. Diese sind Teil der Pflichtwertung. Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 9.1: Betrachten Sie die lineare Abbildung

$$F : \mathbb{C}^2 \quad \to \quad \mathbb{C}^2$$

welche bzgl. der Basis

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \right\}$$

die darstellende Matrix

$$M_A^A(F) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

besitzt. Berechnen die die darstellende Matrix von F bzgl. der Standardbasis.

Hierbei ist $i := \sqrt{-1}$ *die imaginäre Einheit.*

(4 Punkte)

Aufgabe 9.2:
Sei A eine invertierbare $n \times n$-Matrix. Beweisen Sie

$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 9.3: Sei k ein Körper und V ein k-Vektorraum. Betrachten Sie die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathrm{ev} : V &\to (V^*)^* \\ v &\mapsto (f \mapsto f(v)) \end{aligned}$$

Beweisen Sie:

1. ev ist linear.
2. ev ist injektiv.
3. ev ist surjektiv und damit ein Isomorphismus, wenn V endlich-dimensional ist.

(6 Punkte)

(bitte wenden)

Aufgabe 9.4:
Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(3 Punkte)

Bonus-Aufgabe 9.5:
Sei k ein Körper und $U \subset V$ endlich-dimensionale k-Vektorräume. Die duale Abbildung zur Inklusion ist eine lineare Abbildung $p : V^* \to U^*$. Beweisen Sie:

1. p ist surjektiv.
2. $\mathrm{Kern}(p) \cong (V/U)^*$.

Folgern Sie:

3. $U^* \cong V^*/(V/U)^*$.

(4 Punkte)