Lineare Algebra Weihnachtszettel

20.12.2018

Die Aufgaben auf diesem Zettel sind zum Üben während der Weihnachtspause gedacht, sie dienen der freiwilligen Selbstkontrolle. Die Aufgaben müssen nicht bearbeitet werden, die Lösungen werden nicht abgegeben und nicht von den Tutoren korrigiert. Es werden jedoch später Musterlösungen verteilt werden.
Bemerkung zum Schwierigkeitsgrad: Die Aufgaben der ersten beiden Abschnitte sollten von allen bearbeitet werden können. Die Beweisaufgaben in Abschnitt 3 sind objektiv einfach, bereiten aber der Erfahrung nach auch solchen Studierenden Probleme, die im Prinzip mit der Vorlesung zurecht kommen. Abschnitt 4 ist eine Sammlung von anspruchsvolleren Aufgaben, die teilweise über den Stoff und die Anforderungen der Vorlesung hinausgehen.

---

1 Was alle wissen sollten:

Die folgenden Fragen sollten alle Studenten beantworten können, *ohne im Skript nachschauen zu müssen.* Schreiben Sie die Antworten auf und vergleichen Sie!

Aufgabe 1.1:

- Was ist eine Gruppe? Was ist ein Vektorraum?
- Wann sind Vektoren linear abhängig/unabhängig?
- Was ist eine Basis, was ist ein Erzeugendensystem?
- Was ist die Dimension eines Vektorraums? Was besagt der Satz über die Invarianz der Dimension?
- Was ist eine lineare Abbildung? Geben Sie die Dimensionsformel an.
- Was sind darstellende Matrizen? Ist die darstellende Matrix für eine lineare Abbildung eindeutig?

Aufgabe 1.2:

- Geben Sie je drei Bespiele für Gruppen und Vektorräume an. Einer der Vektorräume sollte unendlich-dimensional sein.
- Bilden die Endomorphismen eines Vektorraums eine Gruppe / einen Vektorraum? (Auf den Endomorphismen hat man sowohl die Komposition als auch Addition der Funktionswerte!)
- Warum hat der Vektorraum $\mathbb{R}^n$ die Dimension n?
- Geben Sie eine Basis für $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum und als $\mathbb{C}$-Vektorraum.
- Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum. Warum haben V und V^* die gleiche Dimension?
- Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum und $f : V \to V$ ein Endomorphismus. Was folgt aus $\det(f) \neq 0$?

2 Was alle beherrschen sollten:

Aufgabe 2.1: Wahr oder falsch? Denken Sie genau nach!

1. Sei $Ax = b$ ein Gleichungssystem mit m Gleichungen in n Unbekannten.
   (a) Ist $m = n$, so ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar.
   (b) Ist $m < n$, $b = 0$, so hat das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen.
   (c) Ist $m > n$, $b = 0$, so ist das Gleichungssystem lösbar.
2. Sei k ein Körper. Für $n \in \mathbb{N}$, sei $n \cdot 1_k \in k$ die n-fache Summe von 1 (induktiv: $(n+1) \cdot 1_k = n \cdot 1_k + 1_k$). Gilt $n \cdot 1_k \neq 0_k$ für alle $n \in \mathbb{N}$?
3. Sei V ein Vektorraum der Dimension n, $v_1, \ldots, v_m \in V$ eine Familie von Vektoren.
   (a) Falls $m > n$, so ist die Familie linear abhängig.
   (b) Falls $m < n$, so ist die Familie linear unabhängig.
   (c) Falls $m = n$, so ist die Familie eine Basis.
   (d) Falls $m \neq n$, so ist die Familie keine Basis.
4. Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Sei $v_1, \ldots, v_n \in V$ eine Familie von Vektoren.
   (a) Falls die Familie linear unabhängig ist, dann auch die Familie der $f(v_i)$ für $i = 1, \ldots, n$.

(b) Falls die Familie ein Erzeugendensystem von V ist, so erzeugen die $f(v_i)$ für $i \in I$ den Kern von f.

(c) Falls die Familie ein Erzeugendensystem ist, so gilt $\dim \mathrm{Im} f \leq n$.

5. Seien V und W Vektorräume der Dimension n bzw. m mit Basen A bzw. B. Sei $f : V \to W$ linear mit darstellender Matrix $M_B^A(f)$.

   (a) Falls $n < m$, so ist f injektiv.

   (b) Falls $n > m$, so ist f nicht injektiv.

   (c) Falls $M_B^A(f)$ quadratisch, so ist f ein Isomorphismus.

   (d) Falls $M_B^A(f)$ nicht quadratisch, so ist f kein Isomorphismus.

   (e) Falls $M_B^A(f)$ quadratisch, so sind V und W isomorph.

   (f) Falls $V = W$, $f = \mathrm{id}$, so ist $M_B^A(f) = E_n$ die Einheitsmatrix.

   (g) Falls f ein Isomorphismus, so gilt (bei geeigneter Wahl von A und B) die Normalform $M_B^A(f) = E_N$.

6. Seien $A, B \in M_n(k)$. Wahr oder Falsch?

   (a) Falls es es einen Eintrag von A gibt, der null ist, dann $\det(A) = 0$.

   (b) Falls alle Eintrage von A ungleich null sind, dann $\det(A) \neq 0$.

   (c) Falls alle Eintrage einer Spalte von A null sind, dann $\det(A) = 0$.

   (d) $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.

   (e) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

   (f) $\det(-A) = -\det(A)$.

(24 Punkte)

Aufgabe 2.2: Sei V ein Vektorraum der Dimension n über $\mathbb{F}_2$. Wie viele Elemente hat V?

(3 Punkte)

Die folgenden Aufgaben sind Rechenaufgaben, bei denen in der ein oder anderen Form immer ein lineares Gleichungssystem zu lösen ist. Jedem sollte klar sein, wie an solche Aufgaben heranzugehen ist.

Aufgabe 2.3: Für gegebenes n betrachten wir die $(n \times n)$-Matrix:

$$\begin{pmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ a & a & b & \cdots & b \\ a & a & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & a \end{pmatrix}.$$

Geben Sie die Normalform dieser Matrix an.

(5 Punkte)

Aufgabe 2.4: Sei k ein Körper, in dem $2 \neq 0$ gilt. Finden Sie $A \in M_{3\times 4}(k)$, bei der je zwei Spalten linear unabhängig sind, und deren Rang 2 ist.

(3 Punkte)

Aufgabe 2.5: Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{R}^3$ mit der Basis $A = (v_1, v_2, v_3)$, wobei

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Eine andere Basis des $\mathbb{R}^3$ ist durch $B = (w_1, w_2, w_3)$ gegeben, wobei

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Wie sieht die Basiswechselmatrix $M_B^A(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ aus?

(6 Punkte)

Aufgabe 2.6: Betrachten Sie die untenstehenden Matrizen über $\mathbb{Q}$. Entscheiden Sie, ob sie invertierbar sind und berechnen Sie gegebenenfalls die inverse Matrix.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(5 Punkte)

3 Einfache Beweisaufgaben:

Aufgabe 3.1: Sei $f : U \to V$ eine lineare Abbildung. Seien $U' \subseteq U$ und $V' \subseteq V$ Untervektorräume. Zeigen Sie: Falls $f(U') \subseteq V'$, dann definiert

$$\overline{f} : U/U' \to V/V' : u_i + U' \mapsto f(u_i) + V'$$

eine lineare Abbildung.

(3 Punkte)

Aufgabe 3.2: Sei $f : U \to V$ eine lineare Abbildung. Dann definiert

$$f^* : V^* \to U^* : f^*(\lambda)(u) = \lambda(f(u)) \ \forall \lambda \in V^*, u \in U$$

eine lineare Abbildung.

(3 Punkte)

Aufgabe 3.3: Gegeben sei eine Gerade im $\mathbb{R}^3$. Sind Drehungen, die diese Gerade als Drehachse haben, lineare Abbildungen?

(4 Punkte)

Aufgabe 3.4: Sei k ein Körper, V ein endlich-dimensionaler k-Vektorraum, und $U \subseteq V$ ein k-Untervektorraum von V. Zeigen Sie:

(i) $\dim U \leq \dim V$.

(ii) $\dim V/U \leq \dim V$.

(iii) In (i) gilt $\dim U = \dim V$ genau dann, wenn $U = V$.

(iv) In (ii) gilt $\dim V/U = \dim V$ genau dann, wenn $U = 0$.

(6 Punkte)

Aufgabe 3.5: Wie bisher setzen für $A, B \in M_n(k)$ die Lie-Klammer $[A, B] = AB - BA$. Finden Sie A, B, so dass $[A, B] \neq 0$.
Sei $A \in M_n(k)$ beliebig, $i, j \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie

$$[A^i, A^j] = 0$$

(3 Punkte)

Aufgabe 3.6: Sei $A \in M_2(k)$. Zeigen Sie: falls $A^2 = 0$ gilt, dann $\det(A) = 0$.
Finden Sie $A \in M_2(k)$ mit $\det(A) = 0$ und $A^2 \neq 0$.

(3 Punkte)

Aufgabe 3.7: Sei $A \in M_n(k)$ und $\lambda \in k$. Zeigen Sie, dass $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

(2 Punkte)

Aufgabe 3.8: Eine Matrix $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n \subset M_n(k)$ heißt *obere Dreiecksmatrix*, wenn $a_{i,j} = 0$ für jede $i > j$. Das bedeutet, dass die Matrix A die folgende Form hat:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Sei T die Menge der obere Dreiecksmatrizen.

i) Zeigen Sie, dass T ein k-Untervektorraum von $M_n(k)$ ist.

ii) Berechnen Sie $\dim(T)$ und eine Basis von T.

iii) Zeigen Sie, dass für jede $A \in T$

$$\det(A) = \prod_{i=1}^n a_{i,i}.$$

(6 Punkte)

4 Fortgeschrittene Aufgaben:

Die folgenden Aufgaben sind für diejenigen gedacht, die sich bei den vorherigen Aufgaben gelangweilt haben.

Aufgabe 4.1: Betrachten Sie die Gruppenaxiome von Definition 2.1. Zeigen Sie, dass aus Assoziativität (i) und der Existenz eines neutralen Elementes (ii), sowie der Existenz eines Links-Inversen $a^{-1} \cdot a = e$ folgt, dass a^{-1} auch ein Rechtsinverses ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 4.2: Sei A ein Ring. Ein Element $a \in A$ heißt *nilpotent*, wenn es $n > 0$ gibt mit $a^n = 0$. Zeigen Sie, dass für kommutatives A die Summe von nilpotenten Elementen wieder nilpotent ist. Geben Sie ein Beispiel, dass diese Aussage nicht allgemein für Ringe gilt.

(8 Punkte)

Aufgabe 4.3: *(Elementarteilersatz)* Wir betrachten Matrizen in $M_2(\mathbb{Z})$. Zeigen Sie, dass durch Vertauschen von Zeilen und Spalten sowie durch Addition des Vielfachen einer Zeile/Spalte zur anderen jede Matrix in Diagonalform $[\lambda_1, \lambda_2]$ gebracht werden kann, wobei λ_1 der größte gemeinsame Teiler der Matrixeinträge und λ_2 ein Teiler von λ_1. (Hierbei fassen wir 0 als Teiler jeder Zahl auf.)
Hinweis: Der größte gemeinsame Teiler zweier Zahlen a und b lässt sich als Linearkombination $na + mb$ mit $n, m \in \mathbb{Z}$ schreiben.

(6 Punkte)

Aufgabe 4.4: Betrachten Sie die folgende Matrix in $M_{3,3}(\mathbb{F}_2)$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass die Menge, die die Nullmatrix und alle Potenzen von A enthält, ein Körper ist. Dies ist der Körper $\mathbb{F}_8$. Geben Sie Tabellen für Multiplikation und Addition an.

(10 Punkte)

Aufgabe 4.5: Seien A, B, C beliebige (2×2)-Matrizen. Zeigen Sie:

(i) $A^2 - \mathrm{tr}(A) \cdot A + \det(A) \cdot E_2 = 0$.

(ii) $[A, B]^2 + \det([A, B]) \cdot E_2 = 0$.

(iii) $[[A, B]^2, C] = 0$.

(6 Punkte)

Aufgabe 4.6: Sei k ein Körper, in dem $2 \neq 0$ gilt, sei V ein endlichdimensionaler k-Vektorraum, und $p : V \to V$ und $q : V \to V$ seien Projektoren. Zeigen Sie, dass $p+q$ genau dann ein Projektor ist, wenn $pq = qp = 0$ gilt. Bestimmen Sie Kern und Bild von $p + q$, falls $p + q$ ein Projektor ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 4.7: *(universelle Eigenschaft von $\prod$ und $\bigoplus$)* Sei I eine Menge und V_i für $i \in I$ eine Familie von Vektorräumen. Sei W ein Vektorraum.

1. Sei $V = \prod_{i \in I} V_i$. Für $i \in I$ sei $p_i : V \to V_i$ die Projektion auf die i-te Komponente, d.h. $(v_j)_{j \in I} \mapsto v_i$. Zeigen Sie:

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_k\left(W, \prod_{i \in I} V_i\right) &\to \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_k(W, V_i) \\ f &\mapsto (p_i \circ f)_{i \in I} \end{aligned}$$

ist ein Vektorraumisomorphismus.

2. Sei $V' = \bigoplus_{i\in I} V_i$. Für $i \in I$ sei $\iota_i : V_i \to V'$ die Inklusion in die i-te Komponente, d.h. $\iota_i(v_i) = (v'_j)_{j\in I}$ wobei $v'_j = 0$ für $j \neq i$, $v'_i = v_i$. Zeigen Sie:

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_k\left(\bigoplus_{i\in I} V_i, W\right) &\to \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_k(V_i, W) \\ f &\mapsto (f \circ \iota_i)_{i\in I} \end{aligned}$$

ist ein Vektorraumisomorphismus.

(10 Punkte)

Aufgabe 4.8: Sei $k[x]$ der Polynomring über dem Körper k, aufgefasst als k-Vektorraum. Betrachten Sie die lineare Abbildung:

$$\varphi : k[x] \to (k[x])^*$$

definiert durch

$$\varphi(x^i)(x^j) = \begin{cases} 0 & \text{falls } i \neq j \\ 1 & \text{falls } i = j. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass φ injektiv ist. Warum ist φ nicht surjektiv?

(4 Punkte)

Aufgabe 4.9: Sei $A \in M_n(k)$ nilpotent, also es gibt $m > 0$ mit $A^m = 0$. Zeigen Sie, dass $A^n = 0$.

(5 Punkte)

Aufgabe 4.10: Seien $A, B \in M_n(k)$ mit $\mathrm{rg}(A+B) = \mathrm{rg}(A) + \mathrm{rg}(B)$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Im}(A+B) = \mathrm{Im}(A) \oplus \mathrm{Im}(B)$ und $\dim(\mathrm{Ker}(A) + \mathrm{Ker}(B)) = n$.

(4 Punkte)

Aufgabe 4.11: Sei $A_n \in M_n(\mathbb{R})$ die folgende Matrix:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

In Formeln: wir haben $A_n = (a_{i,j})_{i,j=1}^n$ mit

$$a_{i,j} = \begin{cases} 2 & \text{falls } i = j \\ -1 & \text{falls } |i-j| = 1 \\ 0 & \text{falls } |i-j| \geq 2. \end{cases}$$

i) Zeigen Sie, dass $\det(A_n) = 2\det(A_{n-1}) - \det(A_{n-2})$ für $n > 2$ gilt.

ii) Berechnen Sie $\det(A_n)$.

(5 Punkte)

Aufgabe 4.12: Sei $T \subset M_n(k)$ der Untervektorraum der obere Dreiecksmatrizen aus Aufgabe 3.8. Seien $A, B \in T$. Zeigen Sie

i) $AB \in T$

ii) Falls $\det(A) \neq 0$, dann $A^{-1} \in T$.

iii) $[A, B]$ ist nilpotent.

iv) Sei $T' = \{A \in T \mid \det(A) \neq 0\}$. Dann ist T' eine Gruppe.

(6 Punkte)