Einführung in topologische Gruppen
Übungsblatt 1

Oliver Bräunling
Lukas Braun

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Definition 1 *Sei X eine Menge. Eine Familie $\mathcal{F}$ von Teilmengen $\emptyset \neq F \subseteq X$ heißt* Filter*, wenn*

1) für alle n-Tupel $F_1, \ldots, F_n \in \mathcal{F}$, $n \geq 1$, gilt: $F_1 \cap \ldots \cap F_n \neq \emptyset$.

2) für alle $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ existiert ein $F_3 \in \mathcal{F}$, sodass $F_3 \subseteq F_1 \cap F_2$.

3) für $F \subseteq F'$ und $F \in \mathcal{F}$ ist auch $F' \in \mathcal{F}$.

Falls $\mathcal{F}$ nur die Punkte 1) und 2) erfüllt, nennen wir $\mathcal{F}$ Filterbasis.

Zeigen Sie:

a) Sei (X, τ) ein topologischer Raum. Sei $x \in X$. Die Umgebungen von x bilden einen Filter (für den wir $\mathcal{V}(x)$ schreiben).

b) Sei (G, τ) topologische Gruppe. Der Filter der Umgebungen des neutralen Elements $\mathcal{F} := \mathcal{V}(e_G)$ erfüllt die folgenden Eigenschaften:

1. Für jedes $U \in \mathcal{F}$ existiert ein $V \in \mathcal{F}$ mit $V \cdot V \subseteq U$.
2. Für jedes $U \in \mathcal{F}$ existiert ein $V \in \mathcal{F}$ mit $V^{-1} \subseteq U$.
3. Für jedes $U \in \mathcal{F}$ und jedes $g \in G$ existiert ein $V \in \mathcal{F}$ mit $gVg^{-1} \subseteq U$.
4. Sei $g \in G$. Die Filter $\mathcal{V}(g)$, $g\mathcal{F} := \{gF, F \in \mathcal{F}\}$ und $\mathcal{F}g := \{Fg, F \in \mathcal{F}\}$ stimmen überein.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei G eine Gruppe und $\mathcal{F}$ ein Filter auf G, der die Eigenschaften 1., 2., und 3. aus Aufgabe 1, b) erfüllt. Zeigen Sie:

a) Jedes $U \in \mathcal{F}$ enthält das neutrale Element e_G.

b) Die Teilmengen

$$\tau_{\mathcal{F}} := \{O \subseteq G : \forall g \in O\ \exists U \in \mathcal{F} \text{ mit } gU \subseteq O\}$$

bilden die offenen Mengen einer Topologie $\tau_{\mathcal{F}}$ auf G.

c) $(G, \tau_{\mathcal{F}})$ ist eine topologische Gruppe.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Zeigen Sie: Ist G eine Gruppe, dann ist $\mathcal{F} := \{N_i, i \in \mathbb{N}\}$, wobei $N_i := \langle g^i, g \in G \rangle$ die von den Potenzen g^i erzeugte Untergruppe ist, eine Filterbasis, die 1., 2., und 3. aus Aufgabe 1, b) erfüllt. Außerdem erfüllt $\mathcal{F}$ die Eigenschaft:

5. Für alle $U \in \mathcal{F}$ und $g \in U$ existiert ein $V \in \mathcal{F}$ mit $Vg \subseteq U$.

Wir nennen die induzierte Topologie auf G die *natürliche* oder $\mathbb{Z}$*-Topologie*.

Aufgabe 4 Zusatzaufgabe, (4 Bonuspunkte)

Zeigen Sie, dass es unendlich viele Primzahlen gibt. Benutzen Sie die Eigenschaften der *topologischen Gruppe* $\mathbb{Z}$ mit der natürlichen Topologie aus Aufgabe 3.