Einführung in topologische Gruppen

Übungsblatt 2

Oliver Bräunling
Lukas Braun

Definition 1 *Sei (X, τ) ein topologischer Raum. Wir nennen X* ***Hausdorff-Raum****, wenn für je zwei verschiedene Punkte $x, y \in X$ offene Umgebungen $x \in U$, $y \in V$ existieren mit $U \cap V = \emptyset$.*

Definition 2 *Seien (X, τ) und (Y, σ) topologische Räume. Eine Abbildung $\varphi : X \to Y$ heißt* ***offen****, wenn $\varphi(U) \subseteq Y$ offen ist für alle offenen $U \subseteq X$.*

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass X genau dann ein Hausdorff-Raum ist, wenn die Diagonale

$$\Delta := \{(x, x) \mid x \in X\} \subseteq X \times X$$

abgeschlossen bezüglich der Produkttopologie ist. (Hinweis: verwenden Sie statt Abgeschlossenheit von Δ die Offenheit von $(X \times X) \setminus \Delta$.)

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei (G, τ) eine topologische Gruppe. Zeigen Sie, dass G genau dann ein Hausdorff-Raum ist, wenn jede einpunktige Menge $\{g\} \subseteq G$ abgeschlossen ist. (Hinweis: betrachten Sie für festes $a \in G$ die Abbildung $(g, h) \mapsto g^{-1}ha$.)

Aufgabe 3 (4 Punkte)

a) Seien (X, τ) und (Y, σ) topologische Räume und $\varphi : X \to Y$ eine offene Abbildung. Zeigen Sie, dass auch

$$\varphi \times \varphi : X \times X \to Y \times Y$$

eine offene Abbildung ist.

b) Sei (G, τ) topologische Gruppe. Sei $X \subseteq G$ beliebige Teilmenge und $U \subseteq G$ offene Teilmenge. Zeigen Sie, dass $XU := \{x \cdot u \mid x \in X, u \in U\}$ und UX (entsprechend definiert) offen in G sind.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei (G, τ) topologische Gruppe und $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Sei G/H die Menge der Linksnebenklassen mit der **Quotiententopologie** induziert durch die Projektion

$$\pi : G \to G/H, \quad g \mapsto gH.$$

(Quotiententopologie: $U \subseteq G/H$ ist per Definition offen genau dann, wenn $\pi^{-1}(U)$ offen in G ist. Das ist die *feinste* Topologie auf G/H, sodass π stetig ist.)

Zeigen Sie:

a) Die Projektion π ist eine offene Abbildung.

b) Der Quotient G/H ist ein Hausdorff-Raum genau dann, wenn H abgeschlossen in G ist. (Hinweis: benutzen Sie Teil a) und Aufgabe 3.)

Abgabe am 12.11.2019, am Anfang der Vorlesung.