Einführung in topologische Gruppen
Übungsblatt 3

Oliver Bräunling
Lukas Braun

Satz 1 (Baires Kategoriensatz) *Sei X lokal kompakter regulärer topologischer Raum. Dann ist X nicht die Vereinigung abzählbar vieler abgeschlossener Unterräume, die alle leeres Inneres besitzen.*

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Beweisen Sie Baires Kategoriensatz in obiger Form.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Zeigen Sie:

a) $GL_n(\mathbb{C})$, $GL_n(\mathbb{R})$ und Untergruppen sind topologische Gruppen bezüglich der euklidischen Topologie.

b) Die Untergruppe $U(n) \subseteq GL_n(\mathbb{C})$ der unitären Matrizen ist zusammenhängend. (Sie dürfen verwenden, dass wegzusammenhängende topologische Räume zusammenhängend sind.)

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass $U(n) \subseteq GL_n(\mathbb{C})$ kompakt ist. (Verwenden Sie den Satz von Heine-Borel.)

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei p Primzahl. Für $\mathbb{Q} \ni q = p^m \frac{a}{b}$ mit p, a, b teilerfremd und $m \in \mathbb{Z}$ setze $\nu_p(q) := m$ und definiere den **p-adischen Betrag**

$$|\cdot|_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}, x \mapsto p^{-\nu_p(x)},$$

wobei wir $|0|_p := 0$ setzen.

a) Zeigen Sie, dass $|\cdot|_p$ die Normeigenschaften:
   - $|\cdot|_p \geq 0$ und $|x|_p = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
   - $|x|_p |y|_p = |xy|_p$,
   - $|x + y|_p \leq \max(|x|_p, |y|_p)$ (ultrametrische Dreiecksungleichung)

   erfüllt.

Mit der induzierten Metrik d_p ist $(\mathbb{Q}, d_p)$ ein metrischer Raum. Wir können analog zur Konstruktion der rellen Zahlen als Grenzwerte von Folgen in $\mathbb{Q}$ bezüglich der euklidischen Metrik nun $\mathbb{Q}$ bezüglich der Metrik d_p vervollständigen. Wir setzen

$$R := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q} \mid (x_n) \text{ ist Cauchyfolge bez. } |\cdot|_p\},$$

$$I := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q} \mid (x_n) \text{ ist Nullfolge bez. } |\cdot|_p\}.$$

Mit komponentenweiser Addition und Multiplikation ist R kommutativer Ring mit 1 und I ein maximales Ideal. Damit ist $Q_p := R/I$ ein Körper, der *Körper der p-adischen Zahlen.*

b) Zeigen Sie, dass
$$|\cdot|_p : \mathbb{Q}_p \to \mathbb{R}, \quad [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] \mapsto \lim_{n\to\infty} |x_n|_p$$
wohldefiniert ist und die Normeigenschaften von oben ebenfalls erfüllt.

Abgabe am 19.11.2019, Postfach Braun oder in der Vorlesung.