Einführung in topologische Gruppen
Übungsblatt 4

Oliver Bräunling
Lukas Braun

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei p eine Primzahl. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{Z}_p := \{x \in \mathbb{Q}_p \mid |x|_p \leq 1\}$$

ein nullteilerfreier Ring ist (mit der von $\mathbb{Q}_p$ induzierten Addition/Multiplikation). Zeigen Sie außerdem, dass

$$\mathfrak{m} := \{x \in \mathbb{Q}_p \mid |x|_p < 1\} = p\mathbb{Z}_p$$

ein maximales Ideal in $\mathbb{Z}_p$ ist und $\{x \in \mathbb{Q}_p \mid |x|_p = 1\}$ gerade die Einheiten von $\mathbb{Z}_p$ sind. Wie viele maximale Ideale hat $\mathbb{Z}_p$?

Aufgabe 2 (4 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Z}_p, +)$ mit der von $|\cdot|_p$ induzierten Topologie eine topologische Gruppe ist. Zeigen Sie außerdem, dass die Multiplikation in $\mathbb{Z}_p$ stetig ist.

b) Sei $x \in \mathfrak{m}$ (vgl. Aufgabe 1). Zeigen Sie, dass die geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

in der Topologie von $\mathbb{Q}_p$ gegen $\frac{1}{1-x}$ konvergiert.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Zeigen Sie:

a) Die echten abgeschlossenen Untergruppen von $(\mathbb{R}, +)$ (mit der euklidischen Topologie) sind alle von der Form $a\mathbb{Z}$ für ein $a \in \mathbb{R}$.

b) Die echten abgeschlossenen Untergruppen von $(\mathbb{Z}_p, +)$ sind sogar Ideale im Ring $\mathbb{Z}_p$ und von der Form $\{0\}$ oder $p^n\mathbb{Z}_p$ für beliebige $n \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Zeigen Sie:

a) Für alle $n \geq 1$ ist die Abbildung

$$\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_p/\mathfrak{m}^n$$

ein Ringisomorphismus.

b) Betrachte für $n \geq 1$ die Gruppen $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ mit der diskreten Topologie. Dann ist das Produkt

$$\prod_{n\geq 1} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$$

eine kompakte topologische Gruppe.

c) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\mathbb{Z}_p \to \prod_{n\geq 1} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$$

stetig ist bezüglich der obigen Produkttopologie und der von $|\cdot|_p$ induzierten Topologie auf $\mathbb{Z}_p$.

Abgabe am 26.11.2019, Postfach Braun.