Einführung in topologische Gruppen
Übungsblatt 7

Oliver Bräunling
Lukas Braun

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Betrachten Sie die topologische Gruppe $(\mathbb{R}, +)$ mit der gewöhnlichen (euklidischen) Topologie. Zeigen Sie, dass das Riemann-Integral ein Haarmaß auf $\mathbb{R}$ definiert. Finden Sie ein Haarmaß auf $S^1 \subseteq \mathbb{C}$ (mit der Teilraumtopologie).

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei G eine Gruppe mit der diskreten Topologie. Betrachten Sie das *inverse System* $\{G/N\}_{N\in\mathcal{N}}$, wobei $\mathcal{N}$ die Menge der echten Normalteiler von G mit endlichem Index (also $[G : N] < \infty$) bezeichne. Die Inklusion liefert eine Halbordnung auf $\mathcal{N}$ und für $N \subseteq M$ haben wir einen surjektiven Gruppenhomomorphismus $f_{NM} : G/N \to G/M$. Die *proendliche Vervollständigung* $\hat{G}$ von G ist der *projektive Limes*

$$\hat{G} := \varprojlim_{N\in\mathcal{N}} G/N := \{(x_N)_{N\in\mathcal{N}} \mid x_N \in G/N,\ f_{NM}(x_N) = x_M \text{ für alle } N \subseteq M \in \mathcal{N}\}.$$

Zeigen Sie, dass die proendliche Vervollständigung eine proendliche topologische Gruppe ist. Welche Topologie bietet sich hier an (vgl. Blatt 5, A2)?

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Betrachten Sie die topologische Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$ mit der diskreten Topologie und die proendliche Vervollständigung $\hat{\mathbb{Z}}$. Finden Sie einen injektiven Gruppenhomomorphismus $\mathbb{Z} \to \hat{\mathbb{Z}}$. Zeigen Sie, dass das Bild von $\mathbb{Z}$ dicht in $\hat{\mathbb{Z}}$ liegt. Bestimmen Sie außerdem die proendliche Vervollständigung der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es bezeichne $\mathcal{P}$ die Menge der Primzahlen. Zeigen Sie die folgende Isomorphie topologischer Gruppen:

$$\hat{\mathbb{Z}} \cong \prod_{p\in\mathcal{P}} \mathbb{Z}_p.$$

Abgabe am 17.12.2019, Postfach Braun.