Einführung in topologische Gruppen
Übungsblatt 9

Oliver Bräunling
Lukas Braun

Beachte: wie auf dem letzten Blatt sind Vektorräume hier nicht unbedingt endlichdimensional! Wir bezeichnen die aus der linearen Algebra bekannten Vektorraumbasen auch als *Hamelbasis* (d.h. jeder Vektor kann als endliche Linearkombination von Basisvektoren dargestell werden- im Gegensatz dazu gibt es auch den Begriff der *Schauderbasis*, der auch konvergente Reihen zulässt).

Definition 1 *Sei E ein komplexer Vektorraum mit einer positiv definiten hermiteschen Form $\langle *, * \rangle : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. Wir nennen $(E, \langle *, * \rangle)$* Prähilbertraum*. Ist ein Prähilbertraum vollständig bezüglich der durch $\langle *, * \rangle$ induzierten Norm, so nennen wir ihn* Hilbertraum*.*

Sei $0 \neq w \in E$ und $s \in \mathbb{R}$. Ein Halbraum $H \subseteq E$ ist eine Teilmenge der Form

$$H := H(w, s) := \{v \in E, \mathrm{Re}\langle w, v \rangle \leq s\}.$$

Wir nennen eine Teilmenge K eines (reellen oder komplexen) Vektorraums V konvex*, falls für alle $u, v \in K$ und alle $s \in [0, 1]$ gilt, dass $su + (1 - s)v \in K$.*

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei V ein Banachraum (vgl. Blatt 8). Zeigen Sie: wenn V eine abzählbare Hamelbasis besitzt, ist V endlichdimensional. Hinweis: Benutzen Sie Baires Kategoriensatz.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $(E, \langle *, * \rangle)$ ein Prähilbertraum und $\emptyset \neq K \subseteq E$ eine konvexe, vollständige Teilmenge. Zeigen Sie: für jedes $v \in E$ existiert ein eindeutiges Element $p(v) \in K$ mit minimalem Abstand zu v (in der durch $\langle *, * \rangle$ induzierten Norm). Hinweis: Benutzen Sie die Parallelogrammgleichung.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $(E, \langle *, * \rangle)$ ein Hilbertraum und $K \subseteq E$ eine abgeschlossene vollständige Teilmenge. Zeigen Sie:

$$K = \bigcap_{K \subseteq H \subseteq E \ Halbraum} H.$$

Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 2. Für $u \in E \setminus K$ betrachten sie $p(u)$, $w := u - p(u)$ und den Realteil s von $\langle p(u), w \rangle$. Für ein Element $y \in E \setminus H(w, s)$ betrachten Sie die Abbildung

$$t \mapsto \|(1 - t)p(u) + ty - u\|^2$$

und die Ableitung im Punkt $t = 0$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei G eine topologische Gruppe und N ein abgeschlossener Normalteiler. Zeigen Sie:

a) Falls N und G/N zusammenhängend sind, so ist G zusammenhängend.

b) Falls N und G/N total unzusammenhängend sind, so ist G total unzusammenhängend.

Abgabe am 21.01.2020, Postfach Braun.